ผลของศักย์ฮาร์โมนิคต่อการดักจับสถานะคิวบิตอะตอมจากวงแหวนสั่นพ้องแพนด้า

The Effect of Harmonic Potential on Atomic Qubit Trapping from Micro PANDA Ring Resonator

ดร.ชัชวาล ศรีภักดี

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากงบประมาณเงินผลประโยชน์ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2560
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

The Effect of Harmonic Potential on Atomic Qubit Trapping from Micro PANDA Ring Resonator

Chatchawal Sripakdee

This research is funded by Faculty of Science and Technology
Rajamangala University of Technology PhraNakhon
Year 2017

ชื่อเรื่อง : ผลของศักย์ฮาร์โมนิคต่อการดักจับสถานะคิวบิตอะตอมจากวงแหวนสั่นพ้องแพนด้า

ผู้วิจัย : ดร. ชัชวาล ศรีภักดี

ปีที่ทำการวิจัย : 2560

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้ได้นำเสนอและวิเคราะห์เกี่ยวกับศักย์ดักจับฮาร์โมนิคยังผลพิสัยสั้นจากแกลเลอรีโมดซึ่งถูกสร้างด้วยวงแหวนสั่นพ้องแพนด้าในระบบที่มีเพียงสองสถานะที่ควบกล้ำกันระหว่างไอออน – สนามไฟฟ้า ความลึกของหลุมศักย์การดักจับเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเข้มสนามไฟฟ้าและอัตราการเลื่อนแบบหน่วงของการโพลาไรเซชันของไดโพล การประยุกต์ศักย์ดักจับนี้ใช้กับการดำเนินการในสารสนเทศเชิงควอนตัม

คำสำคัญ: ศักย์การดักจับ , วงแหวนสั่นพ้องแพนด้า , การดักจับด้วยแสง

Title : The Effect of Harmonic Potential on Atomic Qubit Trapping from Micro PANDA Ring Resonator

Researcher : Dr. Chatchawal Sripakdee

Year of research : 2017

Abstract

In this research, from the whispering gallery modes generated by micro PANDA ring resonator, the reduced trapping harmonics potential in the short range regime where the interaction was represented by a coupling between ions – electric field were established and analyzed. It was found that the deep potential well was proportional to electric intensity and the damping polarized transition rate of the dipole. The application of this trapping potential in quantum information engineering was showed many good evidences such as quantum CNOT gate for both single and two qubits as well.

Keywords: Trapping Potential, PANDA Ring Resonator, Optical Tweezing

กิตติกรรมประกาศ

รายงานการวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ เนื่องจากผู้วิจัยได้รับความกรุณาช่วยเหลืออย่างดียิ่งจากบุคคลที่ให้การสนับสนุนในด้านต่างๆ ดังนี้

ขอขอบคุณ คุณสุมาลี จันทร์หัวโทน คุณปนิก เจนทรทิน ในการจัดพิมพ์ต้นฉบับและจัดทำรายงานและรูปเล่มงานวิจัย

ขอขอบคุณ ผศ.ดร ธานินทร์ ปัจจุโส และคุณนิสากร น่วมศรีนวลที่ได้ช่วยออกแบบระบบและทดสอบเครื่องมือวัดสัญญาณต่างๆที่เกี่ยวข้อง

สุดท้ายขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ที่สนับสนุนเงินทุนการวิจัย

ดร. ชัชวาล ศรีภักดี

สารบัญ

บัญชีภาพประกอบ

รูปที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

วงแหวนสั่นพ้องแพนด้านับว่าเป็นสิ่งประดิษฐ์ที่มีประโยชน์มากทั้งในด้านการสื่อสารระยะไกลด้วยระบบเส้นใยแก้วนำแสง และด้านเทคโนโลยีการประดิษฐ์ตัวตรวจรู้เพื่อประยุกต์ใช้ในการดักจับอะตอมหรือโมเลกุลของสสารได้อย่างแม่นยำยาวนานยิ่ง และเป็นวิธีการสร้างสถานะคิวบิตจากอะตอมที่ดีเยี่ยมอีกวิธีหนึ่งเพื่อนำไปใช้ในการประมวลผลในซีพียูของควอนตัมคอมพิวเตอร์และเทคโนโลยีการสื่อสารเชิงควอนตัมในอนาคตต่อไปได้อย่างคุ้มค่ายิ่ง การเพิ่มประสิทธิภาพการดักจับอะตอมหรือโมเลกุลของวงแหวนสั่นพ้องแพนด้าจึงมีความสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่ง เพราะเป็นเครื่องมือที่มีต้นทุนต่ำแต่มีประสิทธิภาพในการใช้งานสูงมาก พกพาสะดวก และมีขนาดเล็ก ดังนั้น ประเด็นหลักของการเพิ่มประสิทธิภาพการดักจับอะตอม คือ การเพิ่มอัตราการเกิดขึ้นของโฟตอนโมดของห้องการสะท้อนแสง (WGM) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ การเพิ่มขึ้นของอัตราการเกิดของอันตรกิริยาระหว่างโฟตอนโมดของสัญญาณขาเข้าและโมเลกุลที่ไม่ตอบสนองต่อสนามไฟฟ้าแบบเชิงเส้นของวงแหวนสั่นพ้องแพนด้านั่นเอง ดังนั้น สถานะโฟตอนจากกระบวนการนี้จึงสามารถอธิบายด้วยสถานะบีบอัดได้ ซึ่งเกิดขึ้นร่วมกับสมบัติทางจุลภาคของเส้นใยแก้วนำแสงพฤติกรรมที่โฟตอนแสดงออกสอดคล้องกับทฤษฎีทางสถิติที่ขึ้นกับเวลา ดังนั้น วิธีการของสโตแคสติกจึงเหมาะที่จะนำมาประยุกต์ใช้ได้กับกรณีศึกษาเหล่านี้

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

เพื่อศึกษาศักย์ฮาร์โมนิคสำหรับการดักจับไอออนสถานะคิวบิตจากวงแหวนสั่นพ้องแพนด้าระดับไมครอน

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

1.3.1 ศึกษาโดยการประยุกต์ใช้สมการชเรอดินเงอร์

1.3.2 ศึกษาวงแหวนสั่นพ้องแพนด้า เพียง 1 คู่

1.4 ทฤษฎี สมมุติฐานและกรอบแนวความคิดของโครงการวิจัย

สมมติฐานของการวิจัย คือ วงแหวนสั่นพ้องแพนด้าให้โมด WGM ที่มีเกรเดียนท์ของสนามไฟฟ้าที่มีขนาดเข้มข้นและสามารถดักจับอนุภาคที่มีโพลาไรเซชันได้ จึงสามารถเขียนศักย์การดักจับแบบฮาร์โมนิคเพื่อแสดงผลในเชิงสารสนเทศเชิงควอนตัมได้

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ด้านวิชาการ ใช้ประกอบการเรียนการสอน ต่อยอดเชิงวิจัย

1.6 แผนการถ่ายทอดเทคโนโลยีหรือผลการวิจัยสู่กลุ่มเป้าหมาย

1.6.1 เผยแพร่ ตีพิมพ์ผลงานการวิจัยในวารสารวิชาการ

1.6.2 สอนบรรยายให้แก่นักศึกษา มทร.พระนคร หรือ สถาบันอุดมศึกษาอื่น หรือภาคอุตสาหกรรมที่ให้ความสนใจ

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทนำ

ถึงแม้ว่า ดิแรก (P. A. M. Dirac) ได้ค้นพบทฤษฎีควอนตัมของการแผ่รังสีแล้วก็ตาม แต่การอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆของแสงส่วนใหญ่ในขณะนั้นยังอยู่ในกรอบของทฤษฎีกึ่งแผนเดิม ซึ่งแสงประพฤติตัวตามแบบของทฤษฎีสนามไฟฟ้าแผนเดิม ต่อมา หยวน (H. P. Yuen) ได้นำแนวคิดของสถานะบีบอัดเข้ามาใช้และสถานะดังกล่าวสามารถผลิตขึ้นมาได้โดยใช้กระบวนการขยายสัญญาณแบบพาราเมตริกซ์สถานะซ้ำซ้อน สถานะบีบอัดจึงเป็นอีกรูปแบบหนึ่งของแสงที่แสดงให้ทราบว่าสถานะของแสงไม่ใช่สถานะแบบดั้งเดิมอีกต่อไป เนื่องจากสถานะบีบอัดมีประโยชน์ทั้งต่อการประยุกต์ใช้ในการสื่อสารเชิงแสงและการตรวจวัดการแผ่รังสีความโน้มถ่วงเป็นอย่างมาก ดังนั้น จึงมีการทดลองจำนวนมากพยายามผลิตสถานะบีบอัด และในปี ค.ศ. 1986 สลัชเชอร์ (R. E. Slusher) และคณะ ประสบความสำเร็จในการผลิตสถานะบีบอัดโดยใช้การขยายสัญญาณแบบพาราเมตริกซ์โดยใช้ดายเลเซอร์ ข้อดีของสถานะบีบอัด คือ การมีสัญญาณรบกวนในควอเดรเจอร์หนึ่งของสนามไฟฟ้าต่ำกว่าสถานะสุญญากาศมาก โดยในปี ค.ศ. 2006 ก็สามารถผลิตระดับความเข้มการบีบอัดเพิ่มขึ้นได้ถึง 7 dB จากการสั่นแกว่งแบบพาราเมตริกซ์ย่อยของการกระตุ้นต่ำสุด

สถานะบีบอัดสุญญากาศได้แสดงภาพลักษณ์ของแสงเชิงควอนตัมออกมาจำนวนมาก และลำแสงสหสัมพันธ์แบบ EPR ก็ถูกผลิตขึ้นตามมาได้อย่างสำเร็จโดยอาศัยการเหลื่อมซ้อนทับกันของลำแสงสองลำซึ่งเกิดจากการกระตุ้นผลึกไม่เชิงเส้น โดยต่อมาลำแสง EPR ได้เข้ามามีบทบาทอย่างมากในการเคลื่อนย้ายสถานะทางควอนตัม ในปี ค.ศ. 1998 ฟูรุซาวา (A. Furusawa) และคณะประสบผลสำเร็จอย่างงดงามในการทดลองเพื่ออธิบายการเคลื่อนย้ายสถานะควอนตัมของแสง เช่นเดียวกันกับกลุ่มของบรอนสไตน์ (S. L. Braunstein) ก็ได้พัฒนาทฤษฎีสารสนเทศเชิงควอนตัมของตัวแปรต่อเนื่องขึ้นมาซึ่งสถานะบีบอัดสุญญากาศถูกใช้งานเพื่อเป็นตัวนำพาข้อมูลสารสนเทศระหว่างผู้รับและผู้ส่ง

คุณสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของแสงเลเซอร์ คือ ความมีระเบียบแบบอาพันธ์ซึ่งมักใช้เป็นตัวกลางการประยุกต์ใช้ที่สำคัญ คือ เพื่อให้เกิดการสะท้อนของโฟตอนหรือโฟตอนเอ็คโค การเตรียมสารไดอิเล็กตริกโมเมนต์ที่มีความพร้อมเพรียงสูงสำหรับสารทั่วไปทำได้โดยยิงพัลส์แรกของแสงเลเซอร์ใส่สารเพื่อทำให้เกิดการเปลี่ยนเฟสหลังจากนั้นยิงพัลส์เลเซอร์ชุดที่สองตามมาแล้วสารก็เกิดการปลดปล่อยเอ็คโคโฟตอนออกมา ซึ่งแนวคิดนี้ได้มาจากสปินเอ็คโคในแม็กนีโตเรโซแนนซ์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการเกิดความพร้อมเพรียงของสปินในสนามแม่เหล็ก สมการบล็อคเชิงแสงแสดงความสมนัยระหว่างไดโพลของอะตอมที่เกิดจากการยิงลำแสงเลเซอร์เข้าไปเหนี่ยวนำ และการกระตุ้นการเหนี่ยวนำสปินโดยสนามแม่เหล็ก

2.2 ทฤษฎีควอนตัมของแสงเบื้องต้น

นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษ ชื่อ เจมส์ เคลิกแม็กซ์เวลล์ (James Clerk Maxwell) ค.ศ. 1831–1879 เป็นบุคคลคนแรกที่ทำนายการมีอยู่ของสมการคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ ณ ตำแหน่ง $\mathbf{r}=(x,y,z)$ และ เวลา t โดยเขียนได้ว่า

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{1}$$

โดยที่

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r},t)+\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r},t) \tag{2}$$

เรียกว่า ศักย์เวกเตอร์ (Vector Potential) โดยที่ $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r},t)=\left(\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r},t)\right)^*$ โดย สนามไฟฟ้า $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ มีความสัมพันธ์กับ ศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ คือ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{3}$$

สนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ มีความสัมพันธ์กับ ศักย์เวกเตอร์ คือ

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{4}$$

สมการ (1) มีผลเฉลยในรูป

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\sum_k\left(\frac{\hbar}{2\omega_k\varepsilon_0}\right)^{1/2}[\hat{a}_k\mathbf{u}_k(\mathbf{r})e^{-i\omega_k t}+\hat{a}_k^{\dagger}\mathbf{u}_k^*(\mathbf{r})e^{i\omega_k t}]. \tag{5}$$

เมื่อความสัมพันธ์การสลับที่ของตัวดำเนินการโบซอนของโฟตอน คือ

$$\left[\hat{a}_k,\hat{a}_{k'}^{\dagger}\right]=\delta_{kk'}, \tag{6}$$

$$\left[\hat{a}_k,\hat{a}_{k'}\right]=\left[\hat{a}_k^{\dagger},\hat{a}_{k'}^{\dagger}\right]=0 \tag{7}$$

และ

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r})=\frac{1}{L^{3/2}}\hat{\mathrm{e}}^{(\lambda)}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \tag{8}$$

โดยที่ความสัมพันธ์เชิงตั้งฉากของ $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ คือ

$$\int_V \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r})\mathbf{u}_{k'}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\delta_{kk'} \tag{9}$$

สัญลักษณ์ $\hat{\mathrm{e}}^{(\lambda)}=|H\rangle,\ |V\rangle$ ทางขวามือของสมการ (8) แสดงสถานะโพลาไรซ์ที่ตั้งฉากกัน (orthonormal) ของโฟตอนอนุภาคหนึ่ง ซึ่งมีอยู่สองสถานะเช่นเดียวกับกรณีของสถานะสปินของอิเล็กตรอนอนุภาคหนึ่ง กล่าวคือ $|H\rangle$ ใช้แทนเวกเตอร์สถานะโพลาไรซ์ของโฟตอนในแนวนอน และ $|V\rangle$ แทนเวกเตอร์สถานะโพลาไรซ์ของโฟตอนในแนวตั้ง

ตัวดำเนินการพลังงานรวมหรือแฮมิลโตเนียนของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอยู่ในรูป

$$\hat{\mathcal{H}}=\frac{1}{2}\int\left(\varepsilon_0\mathbf{E}^2+\mu_0\mathbf{H}^2\right)d\mathbf{r} \tag{10}$$

จากผลเฉลยตามสมการ (5) เมื่อแทนค่าสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ จากสมการ (3) และสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ จากสมการ(4) ลงในสมการ (10) ดังนั้น ตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน $\hat{\mathcal{H}}$ จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \tag{11}$$

ซึ่งตรงกับรูปแบบของตัวดำเนินการพลังงานของการสั่นแกว่งแบบซิมเปิลฮาร์โมนิคที่คุ้นเคยกันดีในกลศาสตร์ควอนตัมนั่นเอง จากเหตุผลนี้จึงทำให้ทราบว่า สถานะของโฟตอนสามารถอธิบายได้ใน 3 รูปแบบ คือ

2.2.1 สถานะฟอคหรือสถานะเชิงตัวเลข (Fock or Numer State)

สถานะแบบนี้มีเวกตอร์เจาะจงและค่าเจาะจงที่สอดคล้องกัน คือ

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \left| n_k \right\rangle = n_k \left| n_k \right\rangle \tag{12}$$

โดยที่ $n_k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ และ

$$\left\langle n_k \mid m_k \right\rangle = \delta_{mn} \tag{13}$$

และการดำเนินการของตัวดำเนินการทำลายต่อสถานะสุญญากาศ (vacuum state) ให้ค่าเจาะจง คือ

$$\hat{a}_k \left| 0 \right\rangle = 0 \tag{14}$$

ดังนั้น จึงเขียนสถานะเชิงตัวเลขใดๆให้อยู่ในสถานะสุญญากาศได้เป็น

$$\left| n_k \right\rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{(n_k\,!)^{1/2}} \left| 0 \right\rangle \tag{15}$$

และมีความสัมพันธ์บริบูรณ์ เป็น

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} | n_k \rangle \langle n_k | = 1 \tag{16}$$

2.2.2 สถานะอาพันธ์ (Coherent States)

เวกเตอร์เคทของสถานะนี้เขียนอยู่ในรูป

$$\left| \alpha \right\rangle = \hat{\mathcal{D}}(\alpha) \left| 0 \right\rangle \tag{17}$$

โดยที่ตัวดำเนินการกระจัด

$$\hat{\mathcal{D}}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \tag{18}$$

โดยที่ α, α^* เป็นจำนวนเชิงซ้อนและสังยุคของมันตามลำดับ ค่าเจาะจงสถานะอาพันธ์ คือ

$$\hat{a} \left| \alpha \right\rangle = \alpha \left| \alpha \right\rangle \tag{19}$$

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์เคทที่สัมพันธ์กับสถานะจำนวนได้เป็น

$$\left| \alpha \right\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \left| n \right\rangle \tag{20}$$

2.2.3 สถานะบีบอัด (Squeezed states)

สถานะบีบอัดหาได้จากการบีบอัดสถานะอาพันธ์ โดยใช้ตัวดำเนินการบีบอัด $\hat{\mathcal{S}}(\zeta)$ ดังสมการ

$$\left|\alpha,\zeta\right\rangle = \hat{\mathcal{D}}(\alpha)\hat{\mathcal{S}}(\zeta)\left|0\right\rangle \tag{21}$$

โดยที่

$$\hat{\mathcal{S}}(\zeta) = \exp\left(\frac{\zeta^*}{2}\hat{a}^2 - \frac{\zeta}{2}(\hat{a}^\dagger)^2\right) \tag{22}$$

โดยที่ ζ, ζ^* เป็นจำนวนเชิงซ้อนและสังยุคของมันตามลำดับ

2.3 วงแหวนสั่นพ้องแพนด้า

การทำนายการเกิดสถานะบีบอัดของโฟตอนในเส้นใยแก้วนำแสงค้นพบโดย P Drummond และคณะ [1] เป็นที่ทราบกันดีว่าอุปกรณ์วงแหวนสั่นพ้องแพนด้า (PANDA Ring Resonator) สามารถใช้ร่วมกันกับเส้นใยแก้วนำแสงเป็นอย่างดี [2] เพราะอุปกรณ์ชนิดนี้สามารถใช้เป็นตัวกรองความถี่ของแสง และใช้เป็นวงจรสวิตชิ่งได้เป็นอย่างดี โดยเมื่อป้อนสัญญาณแบบลูกคลื่นลำแสงโซลิตอนแบบต่อเนื่องที่ประตูขาเข้า (Input Port) ของวงแหวนสั่นพ้องแพนด้า พบว่าสัญญาณที่ประตูขาออก (Throughput Port) มีช่วงของ FWHM ที่ทั้งแคบและแหลมคมมาก ด้วยการออกแบบอุปกรณ์ทางแสงชนิดนี้ให้มีขนาดเล็กลงในระดับไมครอน ซึ่งสามารถบรรจุลงในวงจรรวมได้ โดยมีส่วนประกอบภายในที่สำคัญ ดังรูปที่ 2.1

รูปที่ 2.1 แสดงวงจร PANDA Ring Resonator

คุณสมบัติที่โดดเด่นประการหนึ่งของวงแหวนสั่นพ้องแพนด้า คือ การเกิดขึ้นของโมดห้องการสะท้อนแสง (Whispering Gallery Mode: WGM) ขณะที่มีการเกิดขึ้นของคลื่นสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากอันตรกิริยาระหว่างโฟตอนกับโมเลกุลชนิดไม่เชิงเส้น $\chi^{(3)}$ ของสารตัวกลางวงแหวนสั่นพ้องแพนด้า เล็ดลอดออกมานอกวงแล้วมีการแทรกสอดแบบเสริมกันที่บริเวณภายในห้องวงแหวนกลางของทั้งวงบนและวงล่าง ซึ่งให้ยอดแหลมคมของคลื่นสนามไฟฟ้าที่มีความเข้มสูงมากพอที่จะให้ค่าเกรเดียนท์ของศักย์ไฟฟ้ามากพอเช่นกัน [3] โดยไปเหนี่ยวนำให้เกิดอันตรกิริยาแรงดึงดูดของยอดคลื่นลำแสงกับไดโพลไฟฟ้าของอะตอมอย่างแรง [4] จึงมีความเหมาะสมที่จะนำมาประยุกต์ใช้ทำเป็นอุปกรณ์ดักจับเชิงแสงสำหรับอนุภาคควอนตัมในระดับอะตอมหรือโมเลกุลของสสารในสถานะแก๊สได้ ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ทำตัวตรวจรู้ในอุปกรณ์ระบบควบคุมหรือความปลอดภัยจากแก๊สชนิดต่างๆได้อย่างแม่นยำอย่างยิ่ง

บทที่ 3
วิธีการดำเนินการวิจัย

การวิจัยมีลำดับขั้นตอนต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. ศึกษาการเย็นตัวของอะตอมด้วยวิธีหล่อเย็นด้วยแสงเลเซอร์
2. ศึกษาการดักจับเชิงแสง
3.ศึกษาการดักจับด้วยสนามแม่เหล็ก
4. ศึกษาการดักจับด้วยสนามแม่เหล็กและแสง
5. ศึกษาการดักจับด้วยแสงและความโน้มถ่วง
6. ปรับปรุงแบบจำลองให้สอดคล้องกับข้อมูลที่ได้ยิ่งขึ้น
7. สรุปผล เขียนรายงานการวิจัยและจัดทำรูปเล่ม
8. เผยแพร่ข้อมูลงานวิจัยโดยผ่านการอบรมสัมมนา/เสนอผลงานการประชุมหรือการตีพิมพ์ลงในวารสารระดับชาติหรือนานาชาติ

3.1 การเย็นตัวของอะตอมด้วยวิธีหล่อเย็นด้วยแสงเลเซอร์

โดยทั่วไปการดักจับอะตอมจะทำกับอะตอมที่เย็นตัวแล้วด้วยแสงเลเซอร์ เพราะสามารถลดพลังงานจลน์ของอะตอมลงได้ ดังนั้น การเย็นตัวของอะตอมด้วยเลเซอร์จึงเป็นกุญแจที่สำคัญและเป็นขอบเขตของอุณหภูมิที่ลงลึกได้ ซึ่งอาศัยหลักการที่สำคัญดังนี้

3.1.1 การเย็นตัวแบบดอปเปลอร์

วิธีการแบบนี้มักประยุกต์ใช้กับอะตอมที่มีเพียงสองระดับพลังงานเพื่อลดอุณหภูมิของอะตอมลง โดยอาศัยการดูดกลืนโฟตอนหนึ่งอนุภาคด้วยการเคลื่อนย้ายอะตอมแบบการปลดปล่อยแสงด้วยวิธีดอปเปลอร์จนกระทั่งอุณหภูมิของอะตอมลดลงไปเรื่อยๆในการหน่วงอะตอมให้เคลื่อนที่ช้าลงจากความเร็วเชิงความร้อน v_0 ไปสู่ความเร็วเฉลี่ยที่มีค่าเป็นศูนย์โดยต้องมีช่วงของระยะทางที่สอดคล้อง คือ

$$l = \frac{v_0^2}{2v_r\gamma}\frac{1+G}{G} \tag{23}$$

โดยที่ $v_r = \hbar k / M$ คือ ความเร็วถอยกลับของอะตอม และ G คือ พารามิเตอร์ความอิ่มตัว โดยที่

$$G(r) = \frac{I_r}{I_s} \tag{24}$$

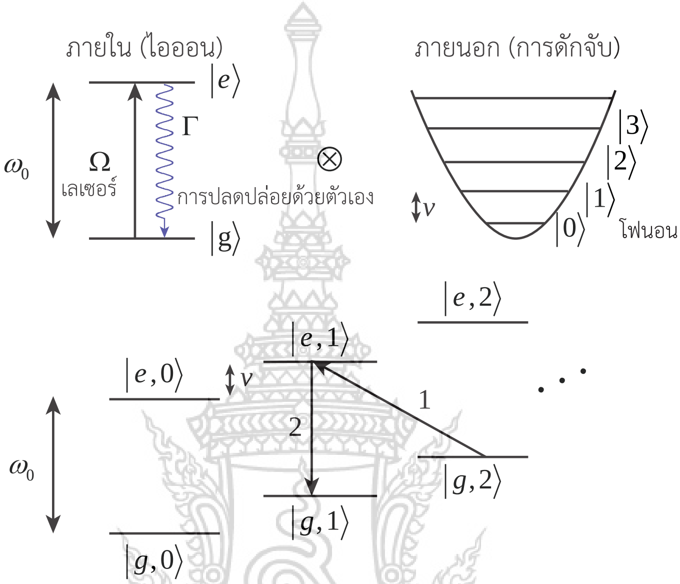
เมื่อ $I(r) = cE_0^2(r)/8\pi$ คือ ความเข้มของลำแสงเลเซอร์ที่ตำแหน่ง r และ ความเข้มแสงที่อิ่มตัว $I_s = c\hbar^2\gamma^2 / 4\pi d^2$ โดย d คือ สมาชิกเมตริกซ์ขั้วคู่ที่ลดรูปแล้ว γ คือ ความน่าจะเป็นของการสลายด้วยตัวเอง อุณหภูมิดอปเปลอร์ T_D คือ

$$k_B T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2} \tag{25}$$

โดยที่ Γ คือ แถบความกว้างของเส้นธรรมชาติของการเลื่อนสถานะ ที่ความเร็วเชิงความร้อน $v_0 \approx 10^5$ cm/s และค่า $G \approx 1$ระยะทางของการหน่วงอะตอมอยู่ระหว่าง 10 -100 cm อุณหภูมิเย็นตัวอยู่ในระดับ 100 – 10 mK

3.1.2 การเย็นตัวลงด้วยวิธีแบบแถบด้านข้าง

ในศักย์การดักจับเราสามารถทำให้ไอออนเย็นตัวลงได้อีกและมากกว่าขีดจำกัดของวิธีดอปเปลอร์ด้วยวิธีที่เรียกว่า การเย็นตัวลงแบบแถบด้านข้าง ดังแสดงในรูปที่



รูปที่ 3.1 แผนภาพแสดงการเย็นตัวลงแบบด้านข้างแถบพลังงาน โดยที่ $|g\rangle$ และ $|e\rangle$ หมายถึง สถานะพื้นและสถานะกระตุ้นของไอออนตามลำดับ

รูปล่างสุดแสดงโครงสร้างพลังงานของไอออนที่ถูกดักจับ ซึ่งเป็นการรวมกันระหว่างสถานะ $|e,...\rangle$ และสถานะ $|g,...\rangle$ และการวิวัฒน์ของสถานะ แสงเลเซอร์ถูกปรับแต่งเพื่อให้เกิดการเลื่อนไปสู่สถานะกระตุ้นด้วยการเคลื่อนตัวไปของสถานะกระตุ้นที่ต่ำที่สุด การปลดปล่อยด้วยตัวเองทำให้เกิดการเลื่อนโดยปราศจากการเปลี่ยนของสถานะที่เคลื่อนที่ (ในค่าเฉลี่ย) เนื่องจากศักย์ฮาร์โมนิคถูกประยุกต์กับทุกคู่ของการเคลื่อนที่ของสถานะต่างๆที่อยู่รอบข้าง การควอนไทซ์เชิงการเคลื่อนที่ถูกย้ายออกแบบหนึ่งต่อหนึ่งในแต่ละรอบวัฏจักรและไอออนยุติลงในสถานะพื้นซึ่งจะไม่ควบกับแสงอีกต่อไป

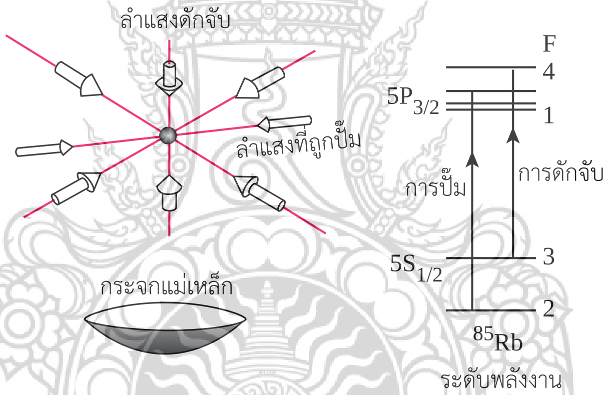
ในทางปฏิบัติใช้แสงเลเซอร์ที่เสถียรเพื่อแยกแถบพลังงานด้านข้างต่างๆออกจากกันซึ่งคือการเลื่อนแบบรามานซึ่งพลังงานที่แตกต่างกันระหว่างลำแสงเลเซอร์สองลำที่ตกกระทบมีค่าเท่ากับพลังงานของโฟนอนหนึ่งอนุภาค

3.1.3 การคัดเลือกอะตอม

ถึงแม้การดักจับไอออนจะมีค่าความลึกของหลุมศักย์ดักจับหลายอิเล็กตรอนโวลต์ก็ตามและมีค่าเกือบเท่ากันสำหรับทุกๆไอออน แต่มีเพียงไม่กี่ไอออนที่มีเสถียรภาพในเชิงประยุกต์ใช้สำหรับการคณนาเชิงควอนตัม โดยไอออนต้องมีสมบัติเบื้องต้น คือ

1. โครงสร้างระดับสถานะทางอิเล็กทรอนิกส์ควรจะมีความเรียบง่ายเพื่ออนุญาตให้มีระบบปิดของสองสถานะโดยไม่ต้องใช้แหล่งเลเซอร์มากเกินไป
2. ระดับพลังงานต่างๆสำหรับการเลื่อนสถานะของคิวบิตควรไม่ต้องคำนึงถึงความไม่เป็นอาพันธ์
3. สถานะต่างๆควรอนุญาตให้เกิดการเย็นตัวด้วยเลเซอร์และอนุญาตให้สามารถการตรวจวัดได้ด้วยการเลื่อนสถานะอย่างมั่นคง

จากคุณสมบัติเบื้องต้นทั้ง 3 ข้อเหล่านี้ รูปแบบของไอออนจึงต้องเป็นแบบไฮโดรจีนิก คือ มีอิเล็กตรอนวงนอกเพียง 1 อนุภาค ระบบที่มีสองสถานะสามารถเป็นได้ทั้งที่มีสถานะพื้นแบบไฮเปอร์ไฟน์ 2 ระดับ หรือ สถานะพื้นและสถานะอิเล็กทรอนิกส์กึ่งเสถียรที่ยืนยาวก็ได้



รูปที่ 3.2 แสดงการดักจับด้วยสนามแม่เหล็กและสนามโน้มถ่วง แผนภาพของพลังงานทางด้านขวามือเป็นของไอออน ^{85}Rb เส้น D2 ใช้เพื่อดักจับไอออนในสถานะพื้น $F=3$และเกิดการเลื่อนสำหรับการปั๊มอะตอมจากสถานะ $F=2$ ไปสู่สถานะ $F=3$ส่วนทางด้านซ้ายมือแสดงเส้น MOT จำนวน 6 เส้นทิศทางตามแกนพิกัดฉาก เมฆหมอกอะตอมที่ทำให้เย็นตัวจำนวน 5×10^6 เกิดขึ้นที่ศูนย์กลางการดักจับและมีเส้นผ่าศูนย์กลางประมาณ 1 mm

3.2 พลศาสตร์ของสนามไฟฟ้าในท่อวงแหวนสั่นพ้องแพนด้า

ให้ E_{in}, E_{out} สนามไฟฟ้าขาเข้าและขาออกที่วงแหวนสั่นพ้องแพนด้าตามลำดับ จะได้ความสัมพันธ์

$$\left|\frac{E_{out}}{E_{in}}\right|^2 = (1-\gamma)^2\left[1-\frac{\kappa\left[1-(1-\gamma)^2\tau^2\right]}{1+(1-\gamma)^2(1-\kappa)\tau-2(1-\gamma)\sqrt{1-\kappa}\tau\cos\phi}\right] \quad (26)$$

โดยที่ $\tau = \exp(-\alpha L/2)$ คือ สัมประสิทธิ์การสูญเสียความเข้มในการแผ่วนครบหนึ่งรอบของสนามไฟฟ้า , L คือ ความยาวหรือเส้นรอบวงของวงแหวนแพนด้า , κ คือ สัมประสิทธิ์คู่ควบความเข้มสนามไฟฟ้าที่บริเวณรอยต่อ และ γ คือ สัมประสิทธิ์คู่ควบการสูญเสียความเข้มสนามไฟฟ้า

3.3 การสร้างสถานะสุญญากาศบีบอัดด้วยวิธีเรโซแนนท์

3.3.1โครงสร้างการแผ่ของคลื่นในตัวกลางไม่เชิงเส้น

เมื่อฉายแสงตกกระทบตัวกลางที่ตอบสนองต่อแสงแบบไม่เชิงเส้น แสงจะไปเหนี่ยวนำให้ตัวกลางเกิดโพลาไรเซชันขึ้น ซึ่งจะเป็นสัดส่วนกับระดับขนาดที่สองหรือสูงกว่าของสนามไฟฟ้า ดังนั้นโพลาไรเซชันจึงประกอบด้วยสองส่วนหลัก คือ ส่วนที่ตอบสนองต่อแสงแบบเชิงเส้น P_L และแบบที่ตอบสนองต่อแสงไม่เป็นเชิงเส้น P_{NL} โดยที่โพลาไรเซชันรวม เขียนได้ว่า

$$P = P_L + P_{NL} \quad (27)$$

โดยที่

$$P_L = \varepsilon_0\chi^{(1)}\cdot\mathbf{E}, \quad (28)$$

$$P_{NL} = \varepsilon_0\chi^{(2)}\cdot\mathbf{EE} + \varepsilon_0\chi^{(3)}\cdot\mathbf{EEE} + \ldots \quad (29)$$

โดยที่ $\chi^{(i)}$ คือ ค่าความอ่อนไหวทางไฟฟ้าลำดับที่ i ซึ่งโดยทั่วไปเป็นเทนเซอร์ลำดับที่ $i+1$ จากสมการแม็กซเวลล์ การแผ่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในตัวกลาง คือ

$$\nabla^2 E - \mu_0\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \quad (30)$$

โดยที่ $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi^{(1)})$ เราสนใจเพียงผลเฉลยของความไม่เป็นเชิงเส้นของตัวกลางในลำดับที่ 2 เท่านั้น สมมติว่าเราสนใจเฉพาะผลเฉลยแบบคลื่นระนาบที่มีโพลาไรซ์ตามแนวแกน x เท่านั้น และคลื่นกำลังแผ่ไปตามแนวแกน z ด้วยความถี่ ω_1, ω_2 และ ω_3 ดังนี้

$$E^{(\omega_1)}(z,t) = \frac{1}{2}E_1(z)e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c., \quad (31)$$

$$E^{(\omega_2)}(z,t) = \frac{1}{2}E_2(z)e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + c.c., \quad (32)$$

$$E^{(\omega_3)}(z,t) = \frac{1}{2}E_3(z)e^{i(\omega_3 t - k_3 z)} + c.c., \quad (33)$$

โดยที่ E_i คือ แอมพลิจูดเชิงซ้อนที่แปรค่าอย่างช้าๆ และเราได้ละทิ้งส่วนที่ขึ้นกับเวลาของมันด้วย ดังนั้น สนามไฟฟ้าชั่วขณะ คือ

$$E(z,t) = E^{(\omega_1)}(z,t) + E^{(\omega_2)}(z,t) + E^{(\omega_3)}(z,t) \tag{34}$$

เพื่อที่จะควบสนามผ่านโพลาไรซ์ไม่เชิงเส้น เราสมมติว่า $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ และยังสมมติให้ $\chi^{(2)}$ เป็นปริมาณสเกลาร์ และ P มีทิศทางขนานกับแกน x สมการ(96) จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\nabla^2 E(z,t) - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E(z,t)^2) \tag{35}$$

เมื่อใช้การประมาณให้แอมพลิจูดแปรค่าช้ามากๆและการประมาณเฟส จึงได้สมการพื้นฐานอธิบายอันตรกิริยาลำดับที่ 2 คือ

$$\frac{dE_1}{dz} = -\frac{i\omega_1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\varepsilon_0 \chi^{(2)} E_3 E_2^* e^{-i(k_3-k_2-k_1)z}, \tag{36}$$

$$\frac{dE_2^*}{dz} = \frac{i\omega_2}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\varepsilon_0 \chi^{(2)} E_2 E_3^* e^{-i(k_3+k_2+k_1)z}, \tag{37}$$

$$\frac{dE_3}{dz} = -\frac{i\omega_3}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\varepsilon_0 \chi^{(2)} E_1 E_2 e^{-i(k_3+k_2+k_1)z}. \tag{38}$$

3.3.2 การผลิตฮาร์มอนิกเชิงแสงลำดับที่ 2

ผลึกไม่แผ่รังสีด้วยตัวเองแบบไม่เชิงเส้นเมื่อกระตุ้นด้วยแสงเลเซอร์หรือเรียกสั้นๆว่าแสงพื้นฐานทำให้เกิดคลื่นฮาร์โมนิคลำดับที่ 2 กระบวนการนี้อธิบายได้ด้วยสมการ (36) – (38) ความถี่แสงพื้นฐานคือ ω และแอมพลิจูด คือ $\mathcal{E}^{(\omega)}$ ดังนั้น จึงให้ $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ และ $_1 = {}_2 = {}^{(\omega)}$ แสงฮาร์โมนิคลำดับที่ 2 คือ $_3 = {}^{(2\omega)}$ และ $\omega_3 = 2\omega$ สมการ (38) แปลงไปเป็น

$$\frac{d\mathcal{E}^{(2\omega)}}{dz} = -i\omega\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\varepsilon_0 \chi^{(2)} (\mathcal{E}^{(\omega)})^2 e^{i\Delta kz} \tag{39}$$

โดยที่ $\Delta k = k_3 - 2k_1$ เมื่ออินทิเกรตสมการนี้จะได้แอมพลิจูดของแสงฮาร์โมนิคลำดับที่ 2 ที่ผิวหน้าของผลึก $z = d$ คือ

$$\mathcal{E}^{(2\omega)}(d) = -i\omega\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\varepsilon_0 \chi^{(2)} (\mathcal{E}^{(\omega)})^2 \frac{e^{i\Delta kd} - 1}{i\Delta k} \tag{40}$$

และกำลังแสงเอาท์พุทของฮาร์โมนิคลำดับที่ 2 คือ

$$\mathcal{I}^{(2\omega)}(d) = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 |\mathcal{E}^{(2\omega)}|^2$$

$$= \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon}\right)^{3/2} (\omega\varepsilon_0\chi^{(2)})^2 (\mathcal{I}^{(\omega)})^2 d^2 \frac{\sin^2(\Delta kd/2)}{(\Delta kd/2)^2} \tag{41}$$

กำลังของแสงฮาร์โมนิคลำดับที่ 2 เป็นสัดส่วนโดยตรงกับกำลังสองของแสงพื้นฐาน จึงนิยาม สัมประสิทธิ์การผันกลับ ดังนี้

$$\eta = \frac{\mathcal{I}^{(2\omega)}}{(\mathcal{I}^{(\omega)})^2} = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon}\right)^{3/2} (\omega\varepsilon_0\chi^{(2)})^2 d^2 \frac{\sin^2(\Delta kd/2)}{(\Delta kd/2)^2} \tag{42}$$

และนิยามปัจจัยการสูญเสียจากการผันกลับ คือ

$$\beta = \frac{\mathcal{I}^{(2\omega)}}{\mathcal{I}^{(\omega)}} = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon}\right)^{3/2} (\omega\varepsilon_0\chi^{(2)})^2 \mathcal{I}^{(\omega)} d^2 \frac{\sin^2(\Delta kd/2)}{(\Delta kd/2)^2} \tag{43}$$

3.3.3 การเทียบเฟสเสมือน

เฟสของการโพลาไรเซชันไม่เชิงเส้นวิวัฒน์ด้วยขนาด $2k_1$ และของคลื่นไฟฟ้าด้วยขนาด k_3 ซึ่ง $\Delta k = k_3 - 2k_1$ คือ ความคลาดของเลขคลื่นของโพลาไรเซชันไม่เชิงเส้นจากคลื่นไฟฟ้า เมื่อ $2k_1 = k_3$ เฟสเหล่านี้นำไปสู่ลำดับขั้นตอน เงื่อนไขนี้ถูกอ้างว่าเป็นการเทียบเฟส ในขณะที่ความเข้มของสนามเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนตาม z^2 เมื่อ $\Delta k = 0$ ฟังก์ชันของความเข้มสนามมีลักษณะเป็นคาบเมื่อ $\Delta k \neq 0$ ดังนั้น ความเข้มก็ไม่เลือนจางไป

ดัชนีหักเหเพิ่มขึ้นอย่างปกติกับค่า ω หรือ k ในที่นี้จะใช้เทคนิคของยาริฝซึ่งเป็นวิธีของการเทียบเฟสโดยใช้ผลึกที่ไม่เป็นเชิงเส้นแล้วทำการมอดูเลตแบบมีคาบเป็นช่วงๆโดยการย้อนทิศทางของแกนหลักอย่างเป็นคาบ สัมประสิทธิ์ไม่เชิงเส้น $\chi^{(2)}(z)$ สามารถกระจายในรูปของอนุกรมฟูริเยร์ คือ

$$\chi^{(2)}(z) = \chi_0^{(2)}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp\left(im\frac{2\pi}{\Lambda}z\right)\right], \tag{44}$$

โดยที่

$$a_m = \frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} \frac{\chi^{(2)}(z)}{\chi_0^{(2)}} \exp\left(-im\frac{2\pi}{\Lambda}z\right)dz \tag{45}$$

และ Λ คือ คาบของ $\chi^{(2)}(z)$ แทนค่าสมการ (44) ลงในสมการ (36) จะได้

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{dz} = -\frac{i\omega_1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\varepsilon_0\chi_0^{(2)}\mathcal{E}_3\mathcal{E}_2^* \exp\left[i\left(m\frac{2\pi}{\Lambda} - k_3 + k_2 + k_1\right)z\right] \tag{46}$$

ถ้ามีจำนวนเต็ม m ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$m\frac{2\pi}{\Lambda} = k_3 - k_2 - k_1 \tag{47}$$

การเทียบเฟสก็เป็นจริง ถ้า $\chi^{(2)}(z)$ เริ่มจาก $\chi_0^{(2)}$ ถึง $-\chi_0^{(2)}$ ทุกๆค่าของ $\Lambda/2$ ซึ่งจะได้

$$a_m = \frac{1-\cos m\pi}{m\pi} \tag{48}$$

ถ้าเลือก $m = 1$ สัมประสิทธิ์ไม่เชิงเส้นจึงเขียนได้ว่า

$$\chi_{eff}^{(2)} = a_1\chi_0^{(2)} = \frac{2}{\pi}\chi_0^{(2)} \tag{49}$$

3.3.4 เงื่อนไขที่ดีที่สุดในการโฟกัสลำแสงลงใส่ผลึกที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ลำแสงเกาเซียนซึ่งมีภาคตัดขวางจำกัดมีช่วงความยาวโฟกัสร่วม $z_0 = \pi\omega_0^2 n / \lambda$ เป็นตัวบอกระยะทางจากเอวของลำแสงซึ่งพื้นที่ของลำแสงมีค่าเป็นสองเท่าของช่วงเอวลำแสง ถ้าละทิ้งการบานออกของลำแสงจะได้สัมประสิทธิ์การผันกลับ คือ

$$\eta = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon}\right)^{3/2} \frac{(\omega\varepsilon_0\chi^{(2)}d)}{\pi\omega_0^2} \frac{\sin^2(\Delta kd/2)}{(\Delta kd/2)^2} \tag{50}$$

3.4. แฮมิลโตเนียนของระบบโฟตอนเกี่ยวพันกัน

เมื่อโฟตอนโมดปั้มมีอันตรกิริยากับผลึกที่มีการตอบสนองต่อลำแสงเลเซอร์พลังงานสูงที่ตกกระทบแบบไม่เชิงเส้นระดับพลังงานของอะตอมผลึกก็ถูกกระตุ้นขึ้นไปอยู่ในสถานะกระตุ้นจนกระทั่งอะตอมของผลึกที่ไม่สมมาตรได้ปลดปล่อยโฟตอนออกมาสองโมด ได้แก่ โฟตอนโมดสัญญาณ(s) และโฟตอนโมดนิ่งเฉย (i) ออกมา สามารถเขียนแฮมิลโตเนียนของอันตรกิริยานี้ซึ่งเรียกว่า การผสมโฟตอนแบบสี่โมด ได้ว่า

$$\hat{\mathcal{H}} = i\hbar\chi^{(3)}\left(\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_p^2 - \hat{a}_s \hat{a}_i \hat{a}_p^{\dagger 2}\right) \tag{51}$$

เมื่อ $\hat{a}_s^\dagger, \hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_p^\dagger$ คือ ตัวดำเนินการการสร้างโฟตอนโมดสัญญาณ โมดนิ่งเฉย และโมดปั๊ม ตามลำดับ เมื่อนำสมการ (51) เพื่อศึกษาการวิวัฒน์ในเวลาของตัวดำเนินการทั้งสามโมด จาก

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \tag{52}$$

เมื่อ $\hat{\rho}$ คือ ตัวดำเนินการเมตริกซ์หนาแน่นของระบบ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ ความน่าจะเป็นของการเลื่อนสถานะของโฟตอน $P(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^+)$ ในปริภูมิจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

$$\hat{\rho} = \int_{\mathcal{D}} \hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^+) P(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^+) d\mu(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^+) \tag{53}$$

เมื่อ $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_p, \alpha_s, \alpha_i)$ และ $\boldsymbol{\alpha}^+ \equiv (\alpha_p^+, \alpha_s^+, \alpha_i^+)$ และ

$$\hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^+) = \frac{|\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle(\boldsymbol{\alpha}^+)^*|}{\langle(\boldsymbol{\alpha}^+)^*|\boldsymbol{\alpha}\rangle} \tag{54}$$

จึงทำให้ได้สมการการวิวัฒน์ของตัวดำเนินการที่สอดคล้อง คือ

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s = \chi^{(3)}\alpha_i^+\alpha_p^2 + \sqrt{\chi^{(3)}\alpha_p/2}\;\xi_1(t) \tag{55}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_s^+ = \chi^{(3)}\alpha_i\alpha_p^{+2} + \sqrt{\chi^{(3)}\alpha_p^+/2}\;\xi_2(t) \tag{56}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_i = \chi^{(3)}\alpha_s^+\alpha_p^2 + \sqrt{\chi^{(3)}\alpha_p/2}\;\xi_3(t) \tag{57}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_i^+ = \chi^{(3)}\alpha_s\alpha_p^{+2} + \sqrt{\chi^{(3)}\alpha_p^+/2}\;\xi_4(t) \tag{58}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_p = -\chi^{(3)}\alpha_s\alpha_i^2\alpha_p^+ + \sqrt{\chi^{(3)}\alpha_s\alpha_i}\ \xi_5(t) \tag{59}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_p^+ = -\chi^{(3)}\alpha_s^+\alpha_i^+\alpha_p + \sqrt{\chi^{(3)}\alpha_s^+\alpha_i^+}\ \xi_6(t) \tag{60}$$

โดยที่ สหสัมพันธ์ของสัญญาณการรบกวน คือ

$$\left\langle \xi_i(t)\xi_j(t')\right\rangle = \delta_{ij}\delta(t-t') \text{ โดยมี } \left\langle \xi_j\right\rangle = 0 \text{ โดยที่ } i, j = 1,2,\ldots,6 \tag{61}$$

ซึ่งสมการการคู่ควบการวิวัฒน์ของตัวดำเนินการ

ผลสืบเนื่องที่เกิดขึ้น คือ หากวงแหวนสั่นพ้องแพนด้ามีสภาวะที่พอเหมาะ กล่าวคือ การเปลี่ยนแปลงไปมาระหว่างกันของโฟตอนทั้งสามโมด จะตรงกับกฎอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัมโฟตอน สถานะเกี่ยวพันกันในโมดสัญญาณและโมดนิ่งเฉยก็เกิดขึ้นตามมา และสถานะเกี่ยวพันกันของโฟตอนเขียนในรูปสมการเบลล์ในแบบสมมาตร ได้คือ

$$|\psi\rangle^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_s \otimes |-\rangle_i \pm |-\rangle_s \otimes |+\rangle_i\right) \tag{62}$$

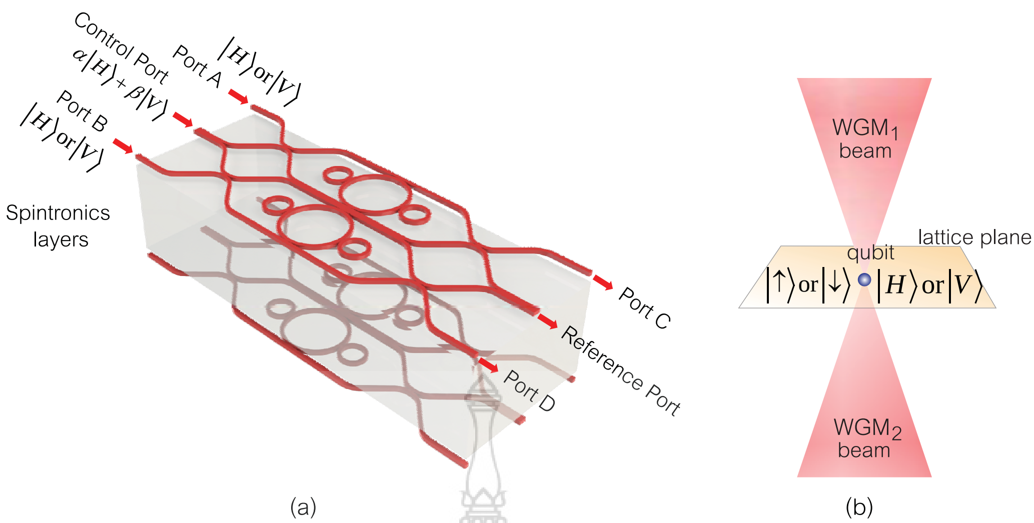
และสถานะแบบ อสมมาตร

$$|\phi\rangle^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_s \otimes |+\rangle_i \pm |-\rangle_s \otimes |-\rangle_i\right) \tag{63}$$

สมการเหล่านี้ซึ่งมีประโยชน์มากในการประยุกต์ใช้ทางด้านสารสนเทศเชิงควอนตัมต่อไป ดังนั้น จึงจำเป็นต้องทดสอบบรรทัดฐานการมีสหสัมพันธ์ระหว่างกันของตัวดำเนินการที่เกี่ยวข้อง โดยอาศัยเงื่อนไขการเข้าคู่กันของความแปรปรวนค่าน้อยสุด $V^{\inf}$ ของตัวดำเนินการ $\hat{X}_i$ และ $\hat{Y}_i$ ตามอสมการของเบลล์ ดังนี้

$$V^{\inf}(\hat{X}_i)V^{\inf}(\hat{Y}_i) < 1 \tag{64}$$

ซึ่งในอสมการนี้ จะนำมาประยุกต์ใช้เพื่อตรวจสอบค่าความสมมูลของตัวดำเนินการในโมดสัญญาณและโมดนิ่งเฉย



รูปที่ 3.3 a) แสดงวงแหวนสั่นพ้องแพนด้าระดับไมครอน b) แสดงการควบกล้ำกันระหว่างสถานะของไอออนและสถานะโพลาไรซ์ของโฟตอนของแสงเลเซอร์

3.5 การดักจับ(Trapping)

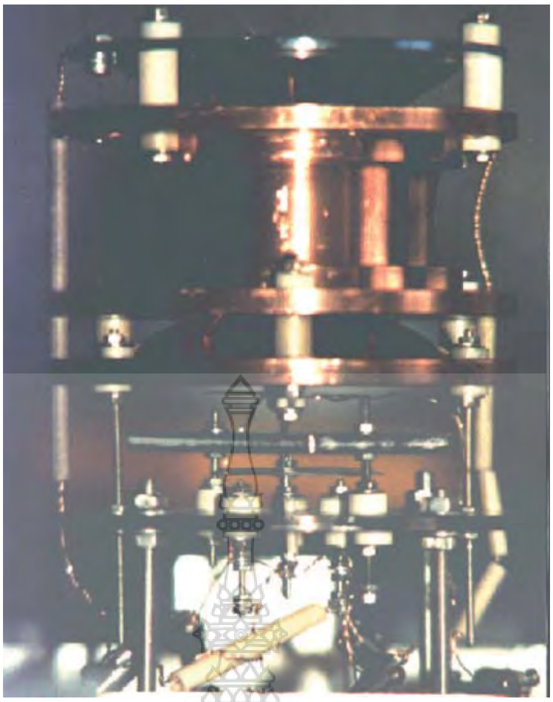
นับตั้งแต่การทดลองเกี่ยวกับอะตอมเดี่ยวใช้ประโยชน์จากลำอะตอมของแก๊สเจือจางซึ่งเป็นการนำเสนอรูปแบบใหม่ จึงแบ่งการดักจับออกเป็น 2 ชนิด คือ การดักจับอะตอมที่เป็นกลางทางไฟฟ้าและการดักจับไอออน

3.5.1 การดักจับไอออน

การดักจับแบบพอล (Paul traps)

จากทฤษฎีบทของเอิร์นชอว (Earnshaw) กล่าวไว้ว่า ไม่สามารถจับอนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าในโครงแบบที่เสถียรภาพได้ด้วยสนามไฟฟ้าสถิตเพียงอย่างเดียว อย่างไรก็ตาม เมื่อมีการผสมกันระหว่างสนามไฟฟ้าสถิตกับสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้าที่ขึ้นกับเวลาก็สามารถมีจุดที่เกิดแรงดึงกลับในทั้ง 3 ทิศทางในแนวแกน x, y, z ที่กระทำต่ออนุภาคที่มีเกิดอำนาจทางไฟฟ้าได้

การดักจับแบบพอลประกอบด้วยอิเล็กโตรดรูปพาราโบลอยและวงแหวนอิเล็กโตรด ดังรูป



รูปที่ 3.4 แสดงเครื่องมือการดักจับไอออน

ถ้าใส่ศักย์ไฟฟ้ากระแสตรง U_{dc} และศักย์ไฟฟ้ากระแสสลับ V_{ac} ความถี่ Ω เข้าไปที่อิเล็กโตรด ดังนั้น ศักย์ดักจับใกล้กับแกนดักจับจะอยู่ในรูป

$$\Phi = \frac{(U_{dc} + V_{ac}\cos(\Omega t))(r^2 - 2z^2 + 2z_0^2)}{r_0^2 + 2z_0^2} \tag{65}$$

โดยที่ r_0 และ z_0 คือ ระยะทางจากแกนดักจับไปยังพื้นผิวของอิเล็กโตรด สมการนี้ คือ ศักย์ฮาร์โมนิคที่เวลา t ที่ทำให้เกิดแรงดึงกลับในหนึ่งมิตินั่นเอง

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ในการดักจับแบบพอล คือ

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2q(U_{dc} - V_{ac}\cos(\omega t))}{r_0^2 + 2z_0^2}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix} \tag{66}$$

ด้วยการแปลง

$$\tau = \frac{1}{2\omega} \tag{67}$$

$$a_x = a_y = -a_z / 2 = \frac{4qU_{dc}}{mr_0^2\Omega^2} \tag{68}$$

$$q_x = q_y = -q_z / 2 = \frac{2qV_{ac}}{mr_0^2\Omega^2} \tag{69}$$

สมการ จะลดรูปมาเป็นสมการของแมธทิว คือ

$$\frac{d^2u_i}{d\tau^2}+(a_i+2q_i\cos(2\tau))u_i=0 \tag{70}$$

โดยที่ $i = x, y, z$

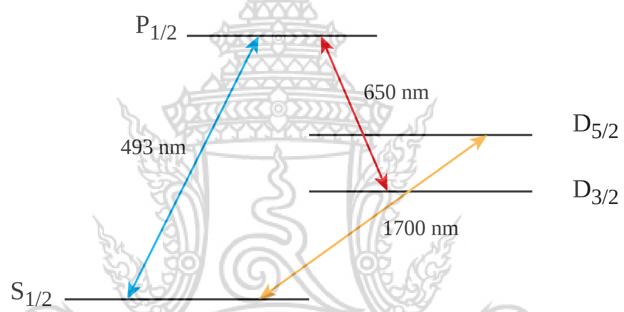
ถ้า $a_i < q_i \ll 1$ สมการ จะมีผลเฉลยแบบวิเคราะห์ คือ

$$u_i(t) = A_i\cos(\Omega_i t+\phi_i)[1+\frac{q_i}{2}\cos(\omega t)] \tag{71}$$

ผลเฉลยนี้จะมีการสั่นที่เร็วมากด้วยความถี่ของการจับ ω ซึ่งเรียกว่า ไมโครโมชัน และสั่นด้วยความถี่ช้าเรียกว่า มาโครโมชัน ที่ความถี่ Ω_i ในศักย์การดักจับฮาร์โมนิคยังผลโดยที่

$$\Omega_i \approx \frac{\omega}{2}(a_i+\frac{q_i}{2}) \tag{72}$$

เพื่อเป็นตัวอย่างจากการทดลองพื้นฐานกรณีการดักจับไอออนเดี่ยวรูปที่ 3.5 แสดงการปลดปล่อยแบบฟลูออเรสเซนท์จากไอออนแบเรียม Ba



รูปที่ 3.5 แสดงระดับชั้นพลังงานของแบเรียม

ถ้าไอออนอนุภาคหนึ่งถูกดักจับแล้วยิงแสงเลเซอร์ใส่มันตลอดเวลาจะทำให้มันเกิดการเลื่อนสถานะจาก $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$ ดังนั้น การปลดปล่อยในย่านความถี่ฟลูออเรสเซนส์จะหายไปทันทีเนื่องจากเกิดการเลื่อนสถานะไปสู่สถานะกึ่งเสถียร $D_{5/2}$ (หรือไปสู่สถานะ $D_{3/2}$)

3.6 ศักย์ฮาร์โมนิค

การดักจับไอออนแบบพอลนั้นศักย์ฮาร์โมนิคมีความชิดใกล้กับศูนย์กลางการดักจับอย่างยิ่ง แฮมิลโทเนียนของอนุภาคในศักย์ฮาร์โมนิคหนึ่งมิติ คือ

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{73}$$

ด้วยตัวดำเนินการสร้างและทำลาย $a^\dagger, a$ ตามลำดับ โดยที่

$$a=\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x+ip) \tag{74}$$

$$a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x - ip) \tag{75}$$

โดยมีคุณสมบัติ

$$a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{76}$$
$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

แฮมิลโทเนียนของศักย์ฮาร์โมนิค จึงอยู่ในรูป

$$H = \hbar\omega\left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2}\right) \tag{77}$$

การวิวัฒน์ของสถานะเจาะจงของการดักจับอนุภาคจึงอยู่ในรูปสถานะเจาะจงแบบฮาร์โมนิคด้วยระยะห่างทางปริภูมิที่เท่ากันและมีความคล้ายกับโฟนอนของการสั่นของแลตทิซที่ควอนไทซ์แล้ว และมักจะให้ค่าความยาวสเกล x_0 คือ

$$x_0 = \sqrt{\hbar / 2m\omega} \tag{78}$$

3.7 การดักจับไอออนในหลุมศักย์ฮาร์โมนิคแบบพิสัยสั้น

อันตรกิริยาแบบขั้วคู่ไฟฟ้าในรูปแบบศักย์ฮาร์โมนิคแบบพิสัยสั้น สามารถเขียนได้ในรูปแบบ

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - rL^2[\theta(x+L) - \theta(x-L)] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 - rL^2)\,, & |x| < L \\ 0\,, & |x| > L \end{cases} \end{aligned} \tag{79}$$

โดยที่ $\theta(x)$ คือ ฟังก์ชันบันไดของเฮฟวี่ไซด์ และ $2L$ คือ พิสัยของศักย์ และ m คือ มวลของอะตอม และ และ ω คือ ความถี่การสั่นแกว่งของอะตอม ตัวพารามิเตอร์ $r = V(0)/[V(0) - V(L)]$ บอกค่าความต่างกันในศักย์ และศักย์อนุญาตให้มีสถานการณ์กระเจิงด้วยค่าพลังงาน ($E > 0$) และมีสถานะขอบเขต ($V(0) < E < 0$ และ $r > 0$) ซึ่งจะพิจารณาสถานะขอบเขต

ถ้าเปลี่ยนตัวแปรใหม่กล่าวคือ

$$z = \alpha x\,,\ \alpha = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \tag{80}$$

ดังนั้น ในกรณีที่ $|x| < L$ สมการชเรอดินเงอร์ คือ

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi(x) = 0 \tag{81}$$

ก็จะมีรูปเป็น

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2}-\left(\frac{z^2}{4}+a\right)\psi(z)=0 \tag{82}$$

โดยที่

$$a=\frac{V(0)-E}{\hbar\omega} \tag{83}$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ อยู่ในรูปการซ้อนทับของฟังก์ชันแพริที

$$\psi=c_e y_1(a,z)+c_o y_2(a,z) \tag{84}$$

โดยที่

$$y_1(a,z)=e^{-z^2/4}M\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{z^2}{2}\right) \tag{85}$$

$$y_2(a,z)=e^{-z^2/4}zM\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{z^2}{2}\right) \tag{86}$$

โดยที่ $M(a,b,z)={}_1F_1(a;b;z)$ คือ ฟังก์ชันคุมเมอร์

$$M(a,b,z)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)}\frac{z^n}{n!} \tag{87}$$

$\Gamma(z)$ คือ ฟังก์ชันแกมมา c_e และ c_o คือ ค่าคงที่ใด ๆ ในกรณีที่ $x>L$ ผลเฉลยแบบเลือนหายไปของอนุภาคอิสระอยู่ในรูป ($\psi\to 0$ เมื่อ $x\to\infty$) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\psi=ce^{-kz} \tag{88}$$

โดยที่ c คือ ค่าคงที่ใดๆ และ

$$k=\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}=\frac{z_L^2}{L}\sqrt{\frac{r}{4}+\frac{a}{z_L^2}} \tag{89}$$

โดยที่

$$z_L=\alpha L=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{\omega}L}{\sqrt{\hbar/m}} \tag{90}$$

คือ ค่าของ z ที่ $x=L$ เนื่องจาก $V(-x)=V(x)$ สมการชเรอดิงเงอร์ยืนยงภายใต้การผกผันของปริภูมิ ($x\to -x$) ดังนั้น จึงสามารถเลือกผลเฉลยที่มีแพริทีแบบจำกัดค่าได้ ฟังก์ชันเจาะจงของแพริทีคู่ (ψ_e) และแพริทีคี่ (ψ_o) ตามแนวแกน x สามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned}\psi_e&=c_e e^{-\alpha^2x^2/4}M\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{\alpha^2x^2}{2}\right)[\theta(x+L)-\theta(x-L)]\\&+ce^{-k|x|}[\theta(x+L)+\theta(x-L)]\end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}\psi_o&=c_o\alpha xe^{-\alpha^2x^2/4}M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{\alpha^2x^2}{2}\right)[\theta(x+L)-\theta(x-L)]\\&+ce^{-k|x|}[\theta(x-L)-\theta(-x-L)]\end{aligned} \tag{92}$$

ผลเฉลยของแพริทีคู่สอดคล้องกับเงื่อนไขของนิวแมนที่จุดกำเนิด ($d\psi(x)/dx|_{x=0}=0$) และแพริทีคี่สอดคล้องกับเงื่อนไขไดริชเลท ($\psi(0)=0$) เมื่อพิจารณาด้านบวกของแกน x และใช้เงื่อนไขความต่อเนื่องของ $\psi(x)$ และของ $d\psi(x)/dx$ ที่ $x=L$ และใช้สูตรหมุนเวียนที่เกี่ยวข้องกับ y_1 และ y_2 คือ

$$\frac{dy_1(a,z)}{dz}+\frac{z}{2}y_1(a,z)=\left(a+\frac{1}{2}\right)y_2\left(a+1,z\right) \tag{93}$$

$$\frac{dy_2(a,z)}{dz}+\frac{z}{2}y_2(a,z)=y_1\left(a+1,z\right) \tag{94}$$

จึงได้

$$\frac{d\psi}{dx}=\alpha e^{-z^2/4}\left\{c_e z\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)M\left(\frac{a}{2}+\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{z^2}{2}\right)-\frac{1}{2}M\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{z^2}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\quad c_o\left[M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{z^2}{2}\right)-\frac{z^2}{2}M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{z^2}{2}\right)\right]\right\} \tag{95}$$

ความต่อเนื่องของ ψ ที่ $x=L$ ขึ้นกับ ce^{-kL}
ดังนั้น สำหรับแพริทีคู่ผลเฉลยมีค่าเป็น

$$c_e e^{-z_L^2}M\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{z_L^2}{2}\right) \tag{96}$$

และสำหรับแพริทีคี่ผลเฉลยมีค่าเป็น

$$c_o e^{-z_L^2}z_L M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{z_L^2}{2}\right) \tag{97}$$

ใช้การเทียบเข้าคู่ตามเงื่อนไข $d\psi/dx$ ที่ $x=L$ ของ

$$-kce^{-kL} \tag{98}$$

สำหรับแพริทีคู่ จะได้

$$c_e\alpha e^{-z_L^2/4}z_L\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)M\left(\frac{a}{2}+\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{z_L^2}{2}\right)-\frac{1}{2}M\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{z_L^2}{2}\right)\right] \tag{99}$$

และสำหรับแพริทีคี่ จะได้

$$c_o\alpha e^{-z_L^2/4}\left[M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{z_L^2}{2}\right)-\frac{z_L^2}{2}M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{z_L^2}{2}\right)\right] \tag{100}$$

โดยจะได้เงื่อนไขการควอนไทซ์ คือ $f=g$ โดยที่

$$f=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{M\left(\frac{a}{2}+\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{z_L^2}{2}\right)}{M\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{z_L^2}{2}\right)} & \text{สำหรับผลเฉลยแพริทีคู่}\\[2ex] \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{z_L^2}\dfrac{M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{z_L^2}{2}\right)}{M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{z_L^2}{2}\right)} & \text{สำหรับผลเฉลยแพริทีคี่}\end{cases} \tag{101}$$

และ

$$g = \sqrt{\frac{r}{4} + \frac{a}{z_L^2}} \tag{102}$$

แก้สมการจากเงื่อนไขการควอนไทซ์สำหรับ a ในช่วง

$$-r\left(\frac{z_L}{2}\right)^2 < a < 0 \tag{103}$$

จะได้ระดับพลังงานที่เป็นไปได้สำหรับอนุภาคที่ถูกจับในบ่อศักย์ในรูปของ a คือ

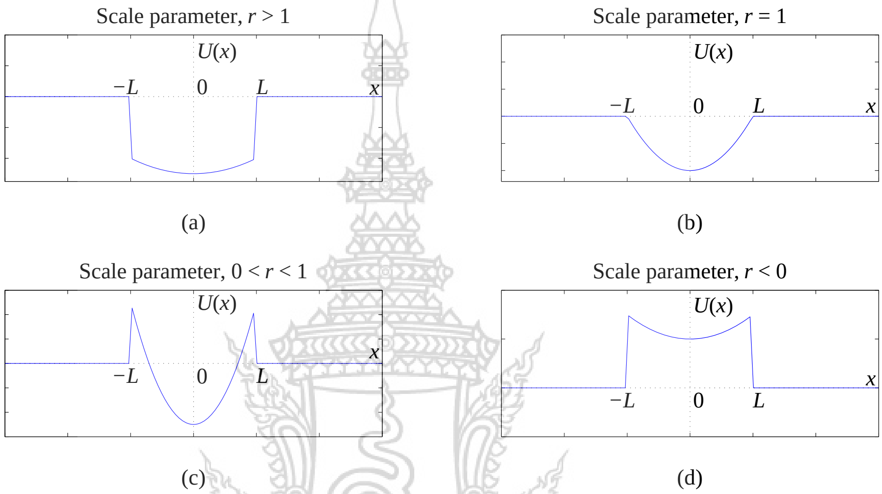
$$E = V(0) + |a|\hbar\omega \tag{104}$$

โดยที่ a ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ศักย์ผ่าน r และ z_L เท่านั้น

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

4.1 ผลการวิเคราะห์เชิงคุณภาพ

ได้นำเสนอศักย์ฮาร์โมนิคดังปรากฏตามสมการ (79) เมื่อพิจารณาการปรับพารามิเตอร์ r ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจึงสามารถเขียนกราฟได้ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 แสดงศักย์ฮาร์โมนิคที่ค่าพารามิเตอร์ r ใดๆ

4.2 การวิเคราะห์เชิงสมการเชิงตัวเลข

จากหัวข้อที่ (3.7) ผลเชิงคุณภาพจากการเขียนกราฟของ f และ g ดังรูปที่ ซึ่งแสดงพฤติกรรมของ f เทียบกับ $|a|$ สำหรับค่าทั้งสองของ $\sqrt{\omega L}$ และ g สำหรับค่า r ที่แตกต่างกันสามค่า พลังงานเจาะจงถูกกำหนดด้วยจุดตัดกันของกราฟที่นิยามด้วย f ด้วยฟังก์ชันรากที่สองที่ถูกนิยามโดย g โดยที่ $0 < g < \sqrt{r}/2$ โดยปราศจากการแก้หาผลเฉลยของเงื่อนไขการควอนไทซ์ กระบวนการนี้ใช้หาสเปคตรัมของการสั่นเฉพาะที่ได้ซึ่งคล้ายกับกรณีของศักย์สี่เหลี่ยม อย่างไรก็ตามศูนย์และขั้วของ f ไม่เกิดขึ้นในช่วงปกติดังที่ควรจะเป็นเหมือนกับกรณีของ $\tan(x)$ และ $\cot(x)$

เมื่อพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันของ $|a|$ ดังนั้น จึงเป็นสาขาของฟังก์ชันเพิ่มทางเดียวซึ่งถูกจำกัดค่าโดยเส้นโค้งเชิงเส้นกำกับแนวตั้งเนื่องมาจากศูนย์ของ $M(a/2+1/4, 1/2, z_L^2)$ และ $M(a/2+3/4, 3/2, z_L^2/2)$ สำหรับค่ามากๆของ $\sqrt{\omega L}$ และสำหรับค่าน้อยๆของ $|a|$ และค่าแอบซิสซาของสมการกำกับซึ่งมีค่าประมาณ $n+1/2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นศูนย์ของ f ด้วย

เนื่องจากฟังก์ชันคอนฟลูเอนท์ไฮเปอร์จีออเมตริกเข้าสู่ 1 เมื่อ $z_L \to 0$ ซึ่งจะได้ว่า $f \to |a|$ สำหรับผลเฉลยแพริทีคู่ และ $f \to -\infty$ สำหรับผลเฉลยแพริทีคี่เมื่อ $\omega L \to 0$ เพราะว่าฟังก์ชันรากที่

สองเป็นศูนย์เมื่อ $|a| = r(z_L/2)^2$ เพียงหนึ่งเจาะจงพลังงาน ซึ่งมันมาพร้อมกับเจาะจงฟังก์ชันแพริทีคู่ด้วย $|a| \approx 0$ จึงเกิดขึ้นได้

จำนวนที่เป็นไปได้ของสถานะมีขอบเขตดำเนินไปกับ $r(z_L/2)^2$ แต่จำกัดด้วยค่าของ $|a|$ ซึ่งทำให้ฟังก์ชันรากที่สองเป็นศูนย์ ดังนั้น ผลเฉลยของสถานะจำกัดขอบเขตทำให้เกิดเซตของผลเฉลยจำนวนจำกัดถ้าพารามิเตอร์ของศักย์มีค่าจำกัด

สเปกตรัมที่เกิดจากระดับพลังงานที่มาพร้อมกับเจาะจงฟังก์ชันของแพริทีสลับ จำนวนของสถานะจำกัดขอบเขตพุ่งขึ้นเมื่อพารามิเตอร์ศักย์เพิ่มขึ้นและมีอย่างน้อยหนึ่งผลเฉลยแน่นอนโดยที่ไม่ต้องคำนึงถึงว่าพารามิเตอร์จะมีค่าน้อยเท่าไร ทุกเจาะจงพลังงานในรูปแบบของ $|a|$ มีแนวโน้มเข้าสู่แบบเส้นกำกับที่ $n+1/2$ เมื่อ $\sqrt{\omega}L \to \infty$ (โดยที่ $n = 0,1,2,3,\ldots$) ระดับพลังงานมีแนวโน้มเข้าสู่ค่าสูงๆเมื่อพารามิเตอร์ r เพิ่มขึ้น เนื่องจากเจาะจงพลังงานเป็นฟังก์ชันของ $\sqrt{\omega}L$ ระดับพลังงานจึงเป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นทางเดียวสำหรับ $r \le 1$ แต่ยังครอบคลุมตัวสั่นแกว่งที่อยู่ด้านในของผนัง ($r > 1$) ทำให้ระดับพลังงานเข้าสู่ค่าสูงสุดสำหรับบางค่าของ $\sqrt{\omega}L$

4.3 การประมาณผลเฉลยแบบวิเคราะห์

รูปแบบและขีดจำกัดของตัวแทนแบบเส้นกำกับสำหรับฟังก์ชันคอนฟลูเอนท์ไฮเปอร์จีออเมตริก ทำให้ได้ผลเฉลยแบบวิเคราะห์เชิงประมาณสำหรับบางกรณีที่สถานะตั้งอยู่ระดับขอบล่างและสถานะที่ตั้งอยู่ในระดับขอบสูงๆ

พจน์เชิงเส้นกำกับของ $M(a,b,z)$ สำหรับ $a \to -\infty$ คือ

$$M(a,b,z) = \Gamma(b)e^{z/2}\left(\frac{1}{2}bz - az\right)^{\frac{1}{4}-\frac{b}{2}}\pi^{-1/2}$$

$$\times\cos\left[\sqrt{2bz-4az}+\left(\frac{1}{4}-\frac{b}{2}\right)\pi\right][1+ \quad |b/2-a|^{-1/2}] \quad , \qquad z \in \Re \qquad (105)$$

เนื่องจาก $\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2)/2$ ดังนั้น เงื่อนไขการควอนไทซ์ตามสมการที่ จึงอยู่ในรูป

$$kL - \frac{z_L^2}{2} \simeq \begin{cases} \sqrt{|a|}z_L \tan(\sqrt{|a|}z_L) & \text{สำหรับผลเฉลยแพริทีคู่} \\ -\sqrt{|a|}z_L \cot(\sqrt{|a|}z_L) & \text{สำหรับผลเฉลยแพริทีคี่} \end{cases} \qquad (106)$$

ผลเฉลยที่อยู่ในรูปที่ง่ายเกิดขึ้นต่อ $V(L) - V(0) << |E| << |V(0)|$ เมื่อ $kL >> z_L^2/2$ ซึ่งจะได้

$$kL \simeq \begin{cases} \sqrt{|a|}z_L \tan(\sqrt{|a|}z_L) & \text{สำหรับผลเฉลยแพริทีคู่} \\ -\sqrt{|a|}z_L \cot(\sqrt{|a|}z_L) & \text{สำหรับผลเฉลยแพริทีคี่} \end{cases} \qquad (107)$$

ในกรณีนี้ผลเฉลยเจาะจงฟังก์ชันภายในหลุมศักย์จึงกลายเป็น

$$\psi(x) \simeq c_e \cos(\sqrt{|a|}\alpha x) + \frac{c_o}{\sqrt{|a|}} \sin(\sqrt{|a|}\alpha x) \tag{108}$$

ต่อไปจะพิจารณาสถานะที่ตั้งอยู่ระดับสูงในศักย์ฮาร์โมนิคขยายต่ำลงมา ($r >> 1$) เพื่อให้ได้ผลลัพธ์สำหรับหลุมศักย์รูปสี่เหลี่ยม ซึ่งอาจละทิ้งผลกระทบต่างๆที่มาพร้อมกับผลเบื้องล่างของ $V(x)$ ซึ่งห่างไกลจากสถานะที่อยู่ระดับสูง $V(L)-V(0) << |V(0)|$ ทำให้บริเวณส่วนล่างของศักย์ดูแบนราบ

สำหรับ z ที่มีค่าน้อยๆฟังก์ชันไฮเปอร์จีโอเมตริก $M(a,b,z)$ มีค่าเป็น

$$M(a,b,z) = 1 + \frac{a}{b} z + \frac{a(a+1)}{2b(b+1)} z^2 + \ldots \tag{109}$$

ดังนั้น เงื่อนไขการควอนไทซ์สำหรับ $z_L << 1$ นำไปสู่

$$|a| + \left(|a|^2 - \frac{r}{4}\right) z_L^2 \simeq 0 \qquad \text{สำหรับผลเฉลยแพริทีคู่}$$

$$1 + \frac{|a|}{3} z_L^2 \simeq 0 \qquad \text{สำหรับผลเฉลยแพริทีคี่} \tag{110}$$

ดังนั้น เพียงรากเดียวที่ถูกต้อง $|a| \simeq 0$ สำหรับผลเฉลยแพริทีคู่ ผลเฉลยเจาะจงแบบกึ่งศูนย์และเจาะจงฟังก์ชันแบบไม่เฉพาะที่ของมันใช้ได้เมื่อ $\sqrt{\omega}L << \sqrt{\hbar / m}$ โดยที่ $V(0) \simeq 0$ ในกรณีนี้รูปร่างของศักย์จะคล้ายริ้วหรือเป็นบ่อตื้นๆ

เมื่อค่า $|z|$ มีค่ามากๆจะได้

$$\frac{M(a,b,z)}{\Gamma(b)} \simeq \frac{e^z z^{a-b}}{\Gamma(a)} \qquad \text{สำหรับ} \quad \Re\mathrm{e}\, z > 0 \tag{111}$$

จาก เอกลักษณ์ $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ และจาก $\Gamma(z)$ มีขั้วอย่างง่ายที่ $z = -n$ เมื่อ $n = 0,1,2,3,\ldots$ เมื่อแทนสมการ (111) ลงในสมการ (101) จะได้

$$f \simeq \begin{cases} -1/2 & \text{สำหรับ } |a| \neq n + 1/2 \\ \text{ไม่นิยาม} & \text{สำหรับ } |a| = n + 1/2 \end{cases} \tag{112}$$

ทั้งผลเฉลยแพริทีคู่และคี่ พฤติกรรมแบบเอกฐานของ f เมื่อ $|a| = n + 1/2$ เป็นเหตุผลว่ามันมีความไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ค่า $|a|$ เหล่านี้ ซึ่งดูได้จากรูปที่ 4.3 และเป็นผลตามมาว่าสำหรับค่าที่ใหญ่มากพอของ z_L ฟังก์ชันรากที่สองสามารถเขียนได้ในรูป

$$g \simeq \frac{\sqrt{\tau}}{2} \tag{113}$$

และค่า

$$|a| \simeq \begin{cases} 2n+1/2 & \text{สำหรับผลเฉลยแพริทีคู่} \\ \\ 2n+3/2 & \text{สำหรับผลเฉลยแพริทีคี่} \end{cases} \tag{114}$$

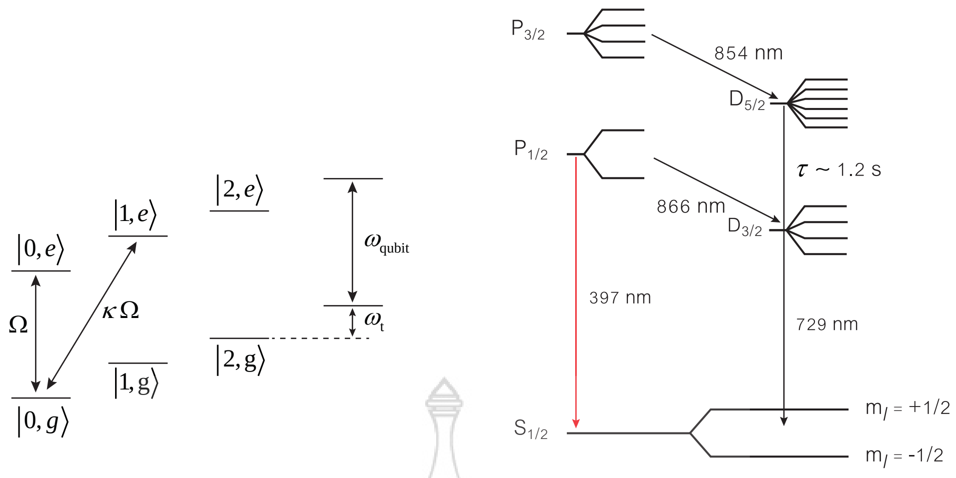
ซึ่งทำให้เงื่อนไขการควอนไทซ์เป็นจริง สมการ (114) จึงเป็นค่าประมาณที่ง่ายที่สุดตราบเท่าที่เราพิจารณาค่าที่อยู่ต่ำที่สุดของ $|a|$ จุดตัดกันของฟังก์ชัน f กับฟังก์ชัน g เกิดขึ้นที่จุดต่ำกว่าแอบซิซาของเชิงเส้นแบบกำกับแนวตั้งของฟังก์ชัน f เล็กน้อย ที่จริงการประมาณที่ดีกว่าคือการได้ค่าเมื่อ r มีค่ามากขึ้น อย่างไรก็ตาม สำหรับค่าต่างๆของ r การพิสูจน์ที่เข้ากันด้วยคือเมื่อ z_L มีค่ามาก ในการประมาณนี้ $M(a,b,\mathrm{z})$ ลดรูปเป็นโพลิโนเมียลดีกรี n ของ z เมื่อ $a=-n$ ในบางกรณีที่ $b=1/2$ และ $b=3/2$ จะได้

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} M\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right)$$
$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2x\, M\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right) \tag{115}$$

เมื่อ $H_n(x)$ คือ โพลิโนเมียลเฮอร์ไมท์ ดังนั้น สำหรับ $\sqrt{\omega}L >> \sqrt{\hbar/m}$ จะได้

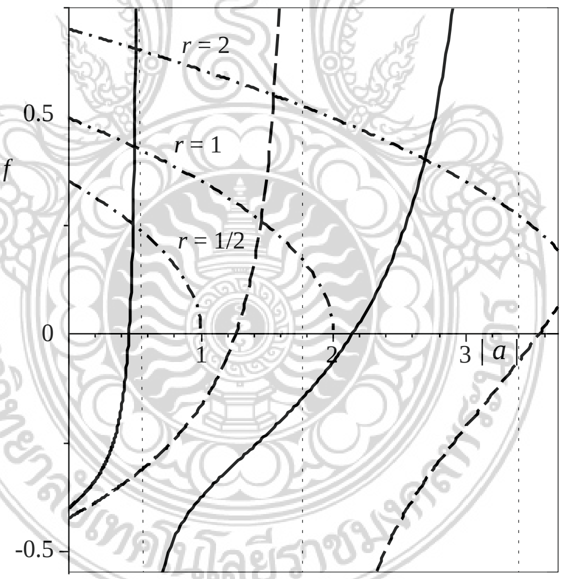
$$E_n \simeq V(0) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \text{ และ } \psi_n(x) \simeq N_n e^{-\alpha^2x^2/4} H_n\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{2}}\right) \tag{116}$$

โดยที่ N_n คือ ปัจจัยการทำให้เป็นปกติ ค่าโดยประมาณสำหรับ $\sqrt{\omega}L >> \sqrt{\hbar/m}$ คาดว่ามีค่าแม่นตรงในกรณีที่ $L \to \infty$ เมื่อศักย์มีค่าอยู่นอกย่านการแกว่งเต็มรูปแบบของตัวแกว่งฮาร์โมนิค จึงสะดวกที่จะบอกว่าค่าบางค่าของ $|a|$ ที่ได้จากเงื่อนไขการควอนไทซ์มีค่าเหมือนกันกับค่าอื่นๆที่ทำให้เจาะจงฟังก์ชันเป็นปกติในช่วง $(-\infty,\infty)$ การประมาณว่าเป็นตัวสั่นแกว่งแบบฮาร์โมนิคได้เมื่อ $\sqrt{\omega}L$ มีค่าจำกัดสำหรับสถานะที่อยู่ต่ำๆซึ่งเมื่อระดับพลังงานอยู่ใกล้กับก้นของศักย์ซึ่งผลกระทบจากบริเวณขอบสามารถละทิ้งได้

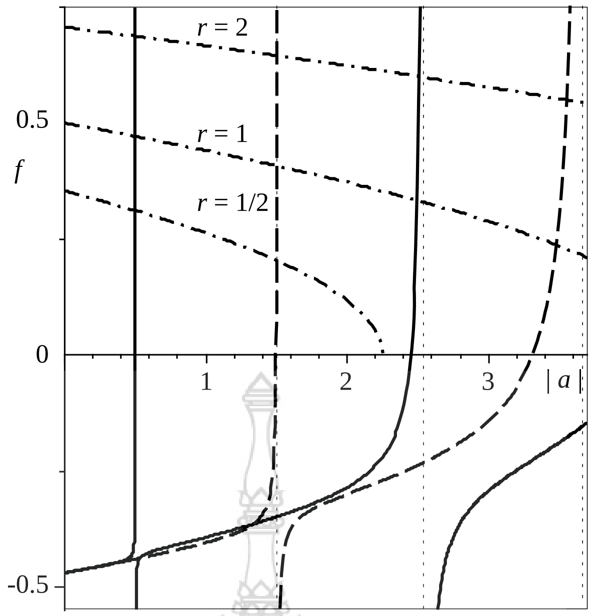


(a) (b)

รูปที่ 4.2 a) แสดงคิวบิตสองสถานะที่เกิดขึ้นของไอออนที่ถูกดักจับในรูป $|g\rangle$ และ $|e\rangle$ b) ศักย์ฮาร์โมนิคเมื่อไอออนถูกขังในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กความเข้มสูงสามารถทำให้ได้สถานะคิวบิตแบบสองสถานะเช่นกัน



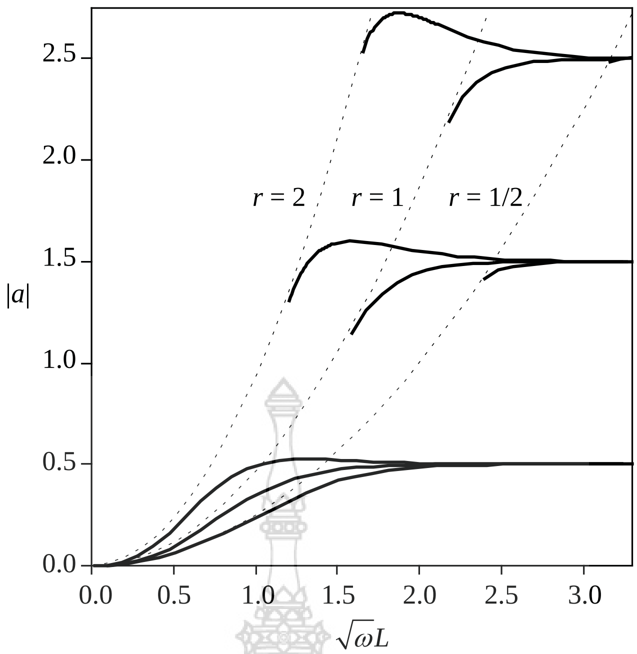
ก) $\sqrt{\omega}L = 2\sqrt{\hbar / m}$



ข) $\sqrt{\omega}L = 3\sqrt{\hbar / m}$

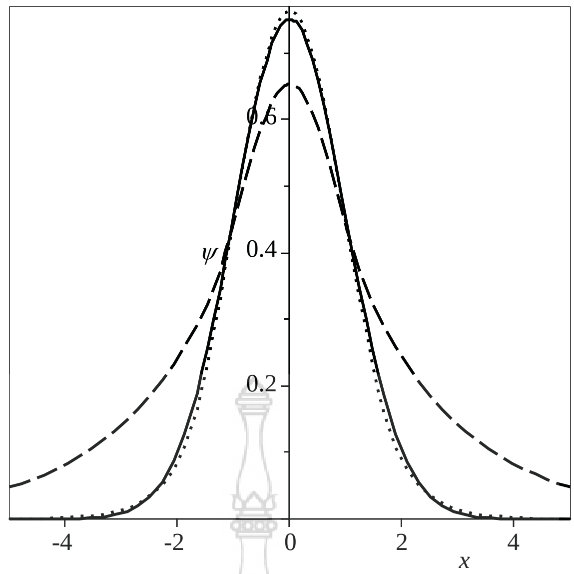
รูปที่ 4.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง f ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $|a|$ เส้นที่ต่อเนื่องแสดงผลเฉลยแพริทีคู่ ส่วนเส้นประแทนผลเฉลยแพริทีคี่ และเส้นจุดแทนเส้นกำกับ และเส้นประกับจุดแทนฟังก์ชันรากที่สอง

ในรูปที่ 4.4 เป็นการพล็อตระหว่างระดับพลังงานที่ตั้งอยู่ในบริเวณเขตค่าต่ำในรูปของ $|a|$ เป็นฟังก์ชันของ $\sqrt{\omega}L$ ผลเฉลยสถานะมีขอบเขตของตัวสั่นแกว่งเฉพาะที่และไม่ถูกกักกันมีจำนวนเซตของผลเฉลยที่มีจำนวนจำกัด จำนวนที่มีได้ของสถานะมีขอบเขตเพิ่มขึ้นกับ $\sqrt{\omega}L$ และมีอย่างน้อยหนึ่งผลเฉลยซึ่งไม่ขึ้นกับว่า $\sqrt{\omega}L$ จะมีค่าน้อยเพียงใดก็ตาม ทุกค่าเจาะจงมีค่าเข้าสู่เส้นกำกับของค่า $n+1/2$ เมื่อ $\sqrt{\omega}L \to \infty$ โดยที่ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ระดับพลังงานมีแนวโน้มพุ่งตรงไปสู่พลังงานที่สูงกว่าเมื่อพารามิเตอร์ r เพิ่มขึ้น ดังรูปที่ 2 อีกทั้งพลังงานซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $\sqrt{\omega}L$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นทางเดียวสำหรับ $r \le 1$ แต่เข้าใกล้ตัวสั่นแกว่งด้วยหลุมศักย์สี่เหลี่ยม $r > 1$ ทำให้ระดับพลังงานเข้าสู่ค่าสูงสุดสำหรับบางค่าของ $\sqrt{\omega}L$



รูปที่ 4.4 แสดงค่า $|a|$ สำหรับระดับพลังงาน 3 ระดับแรกซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $\sqrt{\omega}L$ (ในหน่วยของ $\sqrt{\hbar/m}$) สำหรับค่าทั้ง 3 ค่าของ r เส้นจุดพาราโบลาหมายถึงระดับกระตุ้นของการมีอยู่ของสถานะจำกัดโดย $|V(0)|/\hbar\omega$

ต่อไปในรูปที่ 4.5 ซึ่งแสดงผลลัพธ์ของฟังก์ชันเจาะจงของสถานะพื้นเทียบกับ x สำหรับ $\sqrt{\omega}L = (3/2)\sqrt{\hbar/m}$ และ L มีค่าเท่ากับความยาวคลื่นคอมป์ตัน ซึ่งฟังก์ชันเจาะจงของสถานะพื้นของการสั่นแบบฮาร์โมนิคแบบเต็มรูปแบบ การทำฟังก์ชันให้ปกติ $\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi|^2 = 1$ ทำได้เพียงแค่แบบเชิงตัวเลข ฟังก์ชันเจาะจงสำหรับ $r = 2$ (เมื่อ $|a| \simeq 0.52$) และ $r = 1/2$ (เมื่อ $|a| \simeq 0.416$) ซึ่งแตกต่างจากฮาร์โมนิคแบบเต็มรูป การประมาณที่ดีกว่า คือ $r = 2$ ซึ่งมันเป็นค่าเจาะจง การประมาณที่ไม่แย่เกินไปเมื่อให้ $\sqrt{\omega}L \sim \sqrt{\hbar/m}$ ดังที่คาดหวังไว้จากการวิเคราะห์ความลงเอยสำหรับทุกค่าของ r ควรจะเป็นไปได้เมื่อ $\sqrt{\omega}L >> \sqrt{\hbar/m}$



รูปที่ 4.5 ฟังก์ชันเจาะจงของสถานะพื้นเป็นฟังก์ชันของ x สำหรับ $\sqrt{\omega}L=(3/2)\sqrt{\hbar/m}$ และ L มีค่าเท่ากับความยาวคลื่นคอมป์ตัน เส้นกราฟที่ต่อเนื่องเป็นของตัวแกว่งฮาร์โมนิค ขณะที่เส้นประเป็นตัวแทนของ $r=1/2$ และเส้นจุดเป็นกรณีที่ $r=2$

4.4 สารสนเทศเชิงควอนตัมเกตโดยไอออนที่ถูกดักจับ

4.4.1 แฮมิลโทเนียนของไอออนในการดักจับ

พิจารณาแฮมิลโทเนียนของ N ไอออนในศักย์ดักจับฮาร์โมนิค 3 มิติ ผ่านอันตรกริยาแบบคูลอมบ์ คือ

$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{m}{2}\left(\omega_x x_i^2+\omega_y y_i^2+\omega_z z_i^2+\frac{|p_i|^2}{2}\right)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{i<j}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(\vec{r}_i-\vec{r}_j)} \qquad (117)$$

เนื่องจากศักย์การดักจับเป็นการจับไอออนเป็นเชิงเส้นและตื้นมากในแนวแกน z (ซึ่งตั้งฉากกับกับจุดปลายของหมวกศักย์) จึงเพียงพอที่จะพิจารณาเฉพาะแนวแกน z ไอออนต่างๆยังคงอยู่ในสถานะพื้นเทียบกับการสั่นในทิศทางตามแกน x และแกน y ไอออนที่ถูกทำให้เย็นตัวลงด้วยเลเซอร์ จะอยู่ในย่าน แลมบ์-ดิกเก โดยที่พารามิเตอร์แลมบ์-ดิกเก $\eta \ll 1$ ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างความยาวสเกลค่า z_0 ของแอมพลิจูดการสั่นในศักย์ดับจับฮาร์โมนิคและความยาวคลื่น λ ของแสงเลเซอร์ตกกระทบ หรือ

$$\eta=\frac{2\pi z_0}{\lambda}=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\omega_t}} \qquad (118)$$

โดยที่ N คือ จำนวนของไอออนในหลุมดักจับ m คือ มวลของไอออน ω_t คือ ความถี่การดักจับ

ถ้าไอออนถูกทำให้เย็นตัวลงด้วยเลเซอร์พวกมันจะสั่นด้วยแอมพลิจูดเล็กๆรอบจุดสมดุล ดังนั้น ศักย์คูลอมบ์สามารถกระจายออกเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ ดังนั้น ศักย์การดักจับตามแนวแกน z สามารถเขียนได้เป็น

$$V(z)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}U_{ij}z_i z_j \tag{119}$$

ศักย์ในแนวเฉียงจากการแปลงจนในที่สุดแฮมิลโทเนียนของไอออนถูกแปลงให้อยู่ในรูป

$$H=\sum_{i=1}^{N}\hbar\omega_i a_i^{\dagger}a_i \tag{120}$$

ซึ่งเป็นศักย์ฮาร์โมนิคสำหรับตัวสั่นแกว่งด้วยจำนวนโมดปกติ เท่ากับ N

4.4.2 อันตรกริยากับสนามเลเซอร์

แฮมิลโทเนียนสำหรับอันตรกริยาของไอออนต่างๆในสนามเลเซอร์ความถี่ ω คือ

$$H_I^i=\Omega_i\cos(kz_i+\phi_i+\omega t)(\sigma_i^{+}+\sigma_i^{-}) \tag{121}$$

สำหรับโมด i และสมมติว่าเลเซอร์เป็นคลื่นระนาบ โดยที่ความถี่แบนราบ Ω_i เป็นสัดส่วนโดยตรงกับแอมพลิจูดของสนามเลเซอร์แบบฉบับ σ_i^{+} และ σ_i^{-} คือ ตัวดำเนินการเพิ่มและลดของสองสถานะภายในของอะตอมตามลำดับ z_i ควอนไทซ์ในศักย์ดักจับแล้ว

$$z_i=z_{i,eq}+\frac{1}{\sqrt{\hbar}}\sqrt{2Nm\omega_{CM}}(a+a^{\dagger}) \tag{122}$$

ซึ่งพิจารณาเฉพาะสถานะกระตุ้นที่มีโมดปกติค่าของศูนย์กลางมวลที่มีค่าต่ำสุด ด้วยตำแหน่งสมดุลที่รวมอยู่ในเฟส ϕ_i แล้ว ดังนั้น แฮมิลโทเนียนจึงอยู่ในรูป

$$H_I^i=\Omega_i\cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{N}}(a+a^{\dagger})+\phi_i+\omega t\right)(\sigma_i^{+}+\sigma_i^{-}) \tag{123}$$

เมื่อพิจารณาพารามิเตอร์แลมบ์-ดิกเก กรณี $\eta\ll 1$ จะแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ

1.เมื่อปรับแต่งแสงเลเซอร์ให้ตรงกับการเลื่อนสถานะภายในของอะตอม $\omega=\omega_0$ จะได้

$$H_I^i=\frac{\Omega_i}{2}\left(\sigma_i^{+}\exp(i\phi_i)+\sigma_i^{-}\exp(-i\phi_i)\right) \tag{124}$$

สนามเลเซอร์ทำให้เกิดการเลื่อนเฉพาะสถานะภายในของไอออนเท่านั้น

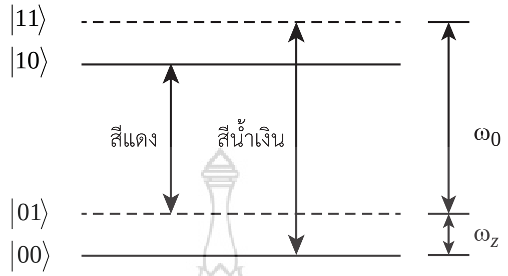
2.เมื่อปรับแต่งแสงเลเซอร์ให้ตรงกับการเลื่อนสถานะแบบด้านข้างแถบพลังงานของอะตอม $\omega=\omega_0\pm\omega_{CM}$ จะได้

$$H_I^i=\frac{\Omega_i}{2\sqrt{N}}\left(\sigma_i^{+}a^{\dagger}\exp(i\phi_i)+\sigma_i^{-}a\exp(-i\phi_i)\right) \quad \text{เมื่อ } \omega=\omega_0+\omega_{CM} \tag{125}$$

และ

$$H_I^i = \frac{\Omega_i}{2\sqrt{N}}\left(\sigma_i^+ a \exp(i\phi_i) + \sigma_i^- a^\dagger \exp(-i\phi_i)\right) \qquad \text{เมื่อ } \omega = \omega_0 - \omega_{CM} \tag{126}$$

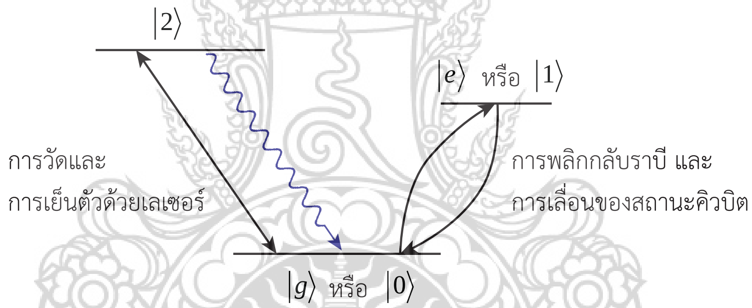
ในกรณีนี้นอกจากจะมีการเลื่อนสถานะภายในแล้วจะมีการผลิตหรือทำลายโฟนอนด้วย รูปที่ 4.6 แสดงความเป็นไปได้ต่างๆ



รูปที่ 4.6 แสดงแผนภาพการเลื่อนของสถานะที่เป็นไปได้ของไอออนที่ถูกดักจับ

4.4.3 การดำเนินการด้วยคิวบิตเดี่ยว

คิวบิตอันหนึ่งมีการเข้ารหัสในสถานะภายในของไอออน ดังรูปที่ 4.7

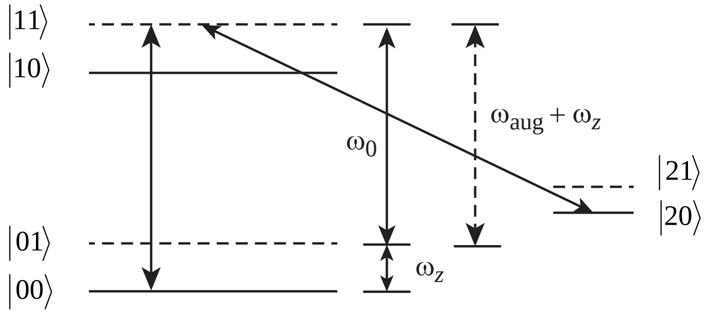


รูปที่ 4.7 การเข้ารหัสคิวบิตในไอออนที่ถูกดักจับ

เกตสถานะคิวบิตเดี่ยวเกิดขึ้นได้โดยการปรับแต่งความถี่ของแสงเลเซอร์ให้ได้ $\omega = \omega_0$ โดยการเลือกการเลื่อนเฟส ϕ และช่วงเวลาของอันตรกริยาโดยประมาณจากการหมุนในแบบใดๆ ดังนั้น เกตของคิวบิตเดี่ยวจึงเป็นไปได้ด้วยวิธีการนี้

4.4.4 การดำเนินการคิวบิตคู่

เกตพลิกกลับที่สามารถควบคุมได้ทำให้เกิดขึ้นได้เมื่อมีระดับพลังงานเสริมของอะตอม ตามแผนภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.8 แผนภาพของเกตของสถานะสองคิวบิต

1. สมมติว่าคิวบิตหนึ่งเริ่มถูกติดตั้งในสถานะภายในของไอออน ($|0\rangle$ หรือ $|1\rangle$) คิวบิตอื่นถูกติดตั้งในสถานะโฟนอน ($|0\rangle$ หรือ $|1\rangle$) โดยคิวบิตทั้งสองจะอยู่ในสถานะซ้อนทับกัน
2. ยิงแสงเลเซอร์ที่ปรับแต่งด้วยความถี่ $\omega_{aux}+\omega_z$ เพื่อให้เกิดการเลื่อนสถานะระหว่างสถานะสนับสนุนหรือสถานะช่วย $|20\rangle$ และเพียงสถานะ $|11\rangle$ เท่านั้น เนื่องการเป็นเพียงความถี่ค่าเดียวดังนั้นจึงไม่มีการเลื่อนไปสู่สถานะกระตุ้น เฟสและระยะของพัลส์ของเลเซอร์ถูกเลือกให้เป็นค่าประเภทพัลส์แบบ 2π ซึ่งจะได้การเปลี่ยนแพริทีของสถานะ คือ

$$|11\rangle \rightarrow -|11\rangle$$

สถานะอื่นที่เหลือยังคงไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้น ผลของสถานะเริ่มต้น คือ

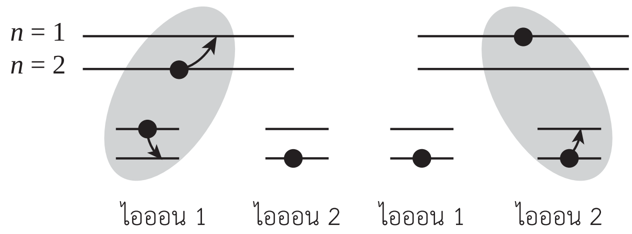
$$\begin{aligned}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)_{ion}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)_{phonon} &= |00\rangle+|10\rangle+|01\rangle+|11\rangle \\ &\rightarrow |00\rangle+|10\rangle+|01\rangle-|11\rangle \qquad (127)\end{aligned}$$

ซึ่งทำให้ได้เกตเชิงเฟสที่ถูกควบคุมตามต้องการ

3. เพื่อที่จะถอดรหัสจากคิวบิตทั้งสองในรูปของการ SWAP ไอออนซึ่งเป็นการแปลงคิวบิตแบบไอออนไปสู่สถานะคิวบิตของโฟนอน ซึ่งทำได้โดยการปรับแต่งแสงเลเซอร์ไปสู่ความถี่ $\omega_0+\omega_z$ และเรียงลำดับเฟสและช่วงของพัลส์ให้เป็นแบบ π เพื่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงสถานะ คือ

$$\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)_{ion} \rightarrow \left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)_{phonon} \qquad (128)$$

อันตรกิริยาระหว่างคิวบิตใดๆเกิดขึ้นเนื่องจากโฟนอนเกิดการควอนไทซ์ในโมดการสั่นของศูนย์กลางมวล หรือ com โมด ซึ่งมาจากทุกไอออนที่อยู่ในสถานะถูกดักจับ ซึ่ง com โมดทำหน้าที่เป็นควอนตัมบัส ดังรูปที่

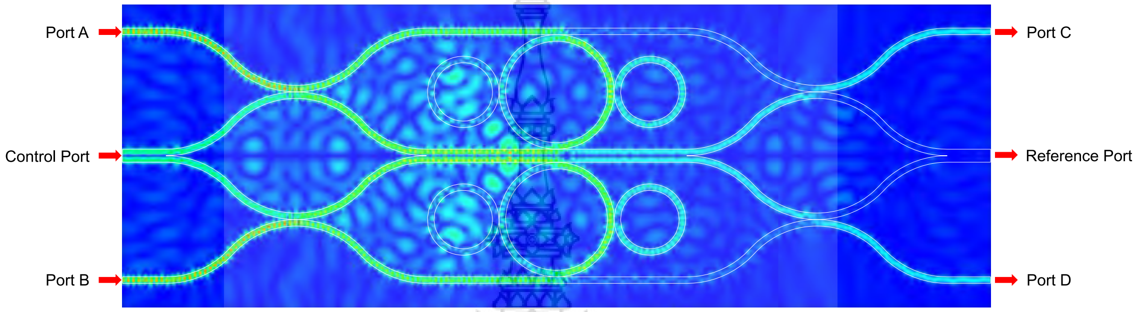


รูปที่ 4.9 แสดงการคณานาเชิงควอนตัมจากสถานะของไอออนที่ถูกดักจับ

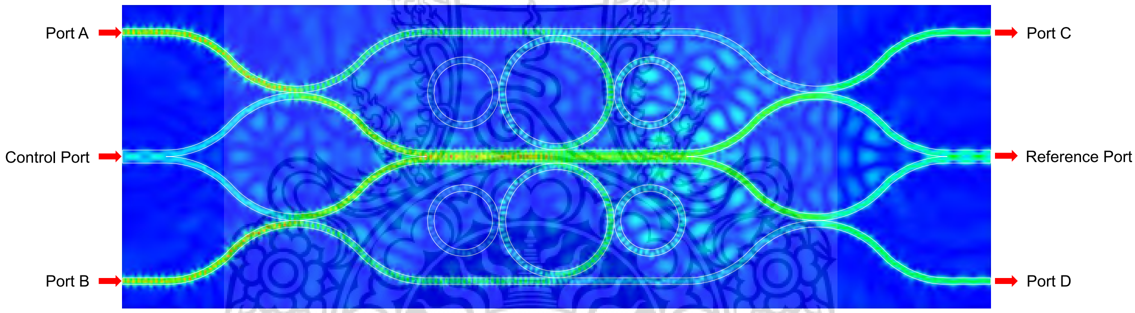
ดังนั้น ประตูหรือเกตแบบ CNOT ระหว่างไอออนตัวที่ k และไอออนตัวที่ j จึงถูกสร้างขึ้นโดยใช้ลำดับของการดำเนินการ ดังต่อไปนี้ [6]

$$CNOT_{jk} = H_k \, \overline{SWAP_k} \, C_j \, SWAP_k \, H_k \qquad (129)$$

โดยที่ C_j เฟสของเกตที่ถูกควบคุมสำหรับไอออนตัวที่ j และ H_k คือ เกตของฮาดามาร์ดสำหรับไอออนตัวที่ k



Initial phase input power : Port A = 0 deg, Port B = 180 deg and Control = no signal



Initial phase input power : Port A = 0 deg, Port B = 0 deg and Control = no signal

รูปที่ 4.10 แสดงโมด WGM ที่เกิดขึ้นในวงแหวนสั่นพ้องแพนด้าระดับไมครอนทั้งด้าน อินพุทและเอาท์พุท

บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

ได้สังเคราะห์และวิเคราะห์หาผลเฉลยของฟังก์ชันคลื่นจากแฮมิลโทเนียนของหลุมศักย์ฮาร์โมนิคพิสัยสั้นซึ่งเกิดจากโมดดับเบิ้ลยูจีเอ็ม (WGM) ของวงแหวนสั่นพ้องแพนด้าระดับไมครอนด้วยสมการชเรอดินเงอร์ต่อการดักจับไอออน เพื่อให้ไอออนประพฤติตัวเป็นคิวบิตเพื่อใช้ในสารสนเทศเชิงควอนตัม ซึ่งต้องมีการปรับแต่งความถี่ของแสงเลเซอร์เพื่อการกระตุ้นให้ไอออนเกิดการเลื่อนระดับสถานะพลังงานในรูปของคิวบิตเพียงแค่สองระดับสถานะที่มีได้ท่ามกลางการเชื่อมโยงอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนร่วมกันกับโฟนอนของเนื้อสารตัวกลาง ซึ่งบทบาทของเลเซอร์เพียงแค่ทำให้เกิดการเลื่อนแค่เพียง 2 สถานะในตัวของคิวบิตที่ถูกดักจับเท่านั้น ด้วยกระบวนการเหล่านี้จึงเป็นไปได้ที่จะนำไปประยุกต์ใช้เพื่อผลิตเป็นชิ้นส่วนของวงจรในหน่วยประมวลผลควอนตัมคอมพิวเตอร์ได้

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยครั้งต่อไปควรออกแบบระบบมิให้มีการเย็นตัวลงลึกมากถึงระดับอุณหภูมิ mK และแฮมิลโทเนียนของระบบควรมีความซับซ้อนมากกว่านี้ และการออกแบบวงแหวนสั่นพ้องแพนด้า ควรมีการสเกลมาตราให้เล็กลงระดับของท่อนำคลื่นย่านนาโนเมตร เพื่อประสิทธิภาพการประมวลผลเชิงปริมาณที่ละเอียดแม่นยำและมีประสิทธิภาพมากขึ้น

บรรณานุกรม

1. P.D. Drummond and Z. Ficek, *Quantum Squeezing*, Springer, Berlin, 2004.

2. Xiao, Min, Jiang, Dong, and Yang. *Coupling Whispering-Gallery-Mode Micro Cavities with Modal Coupling Mechanism*, 2008, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 44. Issue 11, p. 1065.

3. Ashkin, *Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure*, 1970, Phys. Rev. Lett. Vol. 24, p. 156.

4. S. Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable, *Experimental Observation of Optically Trapped Atoms*, 1986, Phys. Rev. Lett. Vol. 57, p. 314.

5. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, Toronto, 1965.

6. D. Bouwmeester, K. Ekert, Artur, A. Zeilinger, Anton (Eds.), *The Physics of Quantum Information*, Springer, Berlin, 2000.

ประวัติผู้วิจัย

ดร.ชัชวาล ศรีภักดี สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีจากวิทยาลัยครูนครราชสีมา วุฒิการศึกษา ค.บ. (ฟิสิกส์) พ.ศ. 2536 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโทจากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย วุฒิการศึกษา วท.ม. (ฟิสิกส์) พ.ศ. 2542 และสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง วุฒิการศึกษา ปร.ด (ฟิสิกส์ประยุกต์) พ.ศ. 2550 ปัจจุบันรับราชการตำแหน่งอาจารย์ สังกัดกลุ่มวิชาฟิสิกส์ สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ดร.ชัชวาล ศรีภักดี มีความสนใจในหัวข้อการวิจัยทางด้านฟิสิกส์เกี่ยวกับสารสนเทศเชิงควอนตัม ทัศนศาสตร์เชิงควอนตัม การจำลองสถานการณ์ โดยมีผลงานวิจัยได้รับการตีพิมพ์ระดับนานาชาติมากกว่า 10 เรื่อง